

TEORÍA DE CONJUNTOS I

OBJETIVOS:

- Establecer correctamente la noción de conjunto y su notación.
- Utilizar adecuadamente los símbolos de pertenencia e inclusión y representar los conjuntos adecuadamente.
- Reconocer los conjuntos especiales y determinar su correspondiente cardinal.
- Resolver problemas utilizando los Diagramas de Veen-Euler y Lewis Carroll.

Noción de Conjunto

Concepto no definido del cual se tiene una idea subjetiva y se le asocian ciertos sinónimos tales como colección, agrupación o reunión de objetos abstractos o concretos denominados "integrantes" u elementos susceptibles de ser comparados.

Ejemplos:

- Los días de la semana
- Los países del continente americano.
- Los jugadores de un equipo de fútbol.

Notación

Generalmente se denota a un conjunto con símbolos que indiquen superioridad y a sus integrantes u elementos mediante variables o letras minúsculas separadas por comas y encerrados con llaves.

Ejemplo: $A = \{\text{los días de la semana}\}$
 $B = \{a, e, i, o, u\}$

Relación de Pertenencia (\in)

Se establece esta relación sólo de "integrante" a conjunto y expresa si el integrante indicado forma parte o no del conjunto considerado.

"....pertenece a" : \in
 "... no pertenece a ..": \notin

Esto quiere decir que dado un "integrante u elemento" y un conjunto

Integrante $\xrightarrow{\in}$ conjunto
 u elemento \notin

Ejemplo: $C = \{1,2, \{1,2\}, 5, 16\}$

- $2 \in C$

- $8 \notin C$
 - $\{1,2\} \in C$
 - $\{5\} \notin C$
- } incorrecto

Determinación de un Conjunto

Consiste en precisar correctamente que "elementos" forman parte del conjunto. Puede hacerse de 2 formas:

a) Por Extensión o forma tabular.

Cuando se indica generalmente a todos y cada uno de los integrantes

Ejemplo: $A = \{a, e, i, o, u\}$
 $C = \{2,4,6,8\}$

Es evidente que el orden en el cual son listados los "elementos" del conjunto no afecta el hecho de que pertenece a él.

De este modo en el conjunto

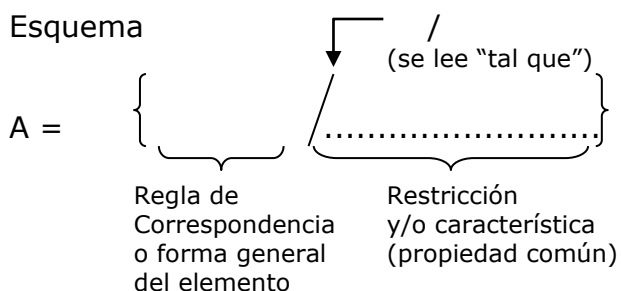
$A = \{a,e,i,o,u\} = \{a,o,u,i,e\}$

No todos los conjuntos pueden ser expresados por extensión, entonces se recurre a otra forma de determinación.

b) Por Comprensión o forma constructiva

Cuando se enuncia una propiedad que caracteriza a todos los elementos del conjunto, de tal manera que cada objeto que goza de la propiedad pertenece al conjunto y todo elemento del conjunto goza de la propiedad mencionada.

Esquema



B = {n/n es una vocal}

C = {n²-1 / n ∈ Z, 1 ≤ n ≤ 7}

CONJUNTOS NUMERICOS

1. Conjunto de los números naturales

IN = {1,2,3,4,...} EJM 17 ∈ IN

IN₀ = IN* = {0,1,2,3,...}

Observación

Cero (0) es natural

2. Conjunto de los Números Enteros

Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}

$\frac{3}{8} \notin Z, -24 \in Z$

3. Conjunto de los Números Racionales

Q = {a/b / a ∈ Z ∧ b ∈ Z ∈ b ≠ 0}

3 ∈ Q porque : $3 = \frac{3}{1}$

0,5 ∈ Q porque $0,5 = \frac{5}{10}$

0,333... ∈ Q porque $0,333... = \frac{1}{3}$

$\pi = 3,141592... \notin Q$ porque $\pi \neq \frac{a}{b}$

Aplicación I

Dado el conjunto

B = {1, π, {π}, 2 {1}, {1,2},3}

Indicar que proposiciones son verdaderas o falsas

* {π} ∈ B * {1} ∈ B

* 1 ∈ B * {3} ∉ B

* {1,2} ∈ B * π ∉ B

Aplicación II

Determinar por extensión y comprensión los siguientes conjuntos

P = {2, 6, 12, 20,..., 10100}

Q = {3x+1/x ∈ Z ∧ -3 < x < 3}

Cardinal de un Conjunto

Se llama Número Cardinal de un conjunto A a la clase de los conjuntos coordinables con A (es decir el número cardinal es una clase de equivalencia). Vulgarmente se acostumbra a señalar que el número cardinal, es el número de elementos del conjunto A y se denota como n (A) ó card (A)

Ejemplo:

A = {3, 6, 9, 12, 15} entonces n (A) = 5

P = {2,2,3,3,3,5,7} entonces n (P) = 4

Número Ordinal

Teniendo en cuenta una disposición de los elementos dentro del conjunto del cual forman parte, cada uno determina su número ordinal como el lugar que ocupa en el orden establecido.

Notación:

Ord (x) : número ordinal de x

S = {7, a, Δ, 13} → ord (a) = 2, ord (Δ) = 3

Cuantificadores

a) **Universal:** Se denota por "∀" y se lee "para todo" o "para cualquier" Si P(x) es una función proposicional, "∀ x ∈ A; P(x)" es una proposición que será verdadera cuando para todos los valores de x ∈ a se cumpla P(x)

Ejemplo:

Si A = {2,4,6,8}

P(x) = x es un número par

P(y) = 3y - 2 > 4

Luego ∀ x ∈ A: x es un # par (V)

∀ y ∈ A: 3y - 2 > 4 (F)

b. **Existencial.** Se denota por "∃" y se lee "existe por lo menos un" Si P(x) es una función proposicional,

" $\exists x \in A/P(x)$ " es una proposición que será verdadera si existe por lo menos un elemento de A, que cumple P (x)

Ejemplo

Si: $B = \{7,5,4,1\}$

$P(x) = x$ es un número impar

$P(y) = (y-4)^2 = 4$

Luego:

$\exists x \in B/x$ es impar (V)

$\exists y \in B/(y-4)^2 = 4$ (F)

Negación de los Cuantificadores

$$\sim(\forall x \in A : P(x)) \equiv \exists x \in A / \sim P(x)$$

$$\sim(\exists x \in A / P(x)) \equiv \forall x \in A : \sim P(x)$$

Diagramas de Venn – Euler

Es la representación geométrica de un conjunto mediante una región de plano limitado por una figura geométrica cerrada en cuyo interior se indican los "elementos" que forman el conjunto

Ejemplo: $A \{a,b,c,d,e\}$

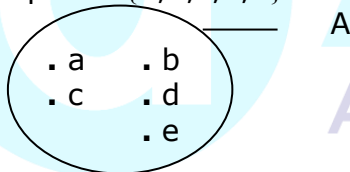


Diagrama (Lewis – Carroll)

Su verdadero nombre es Charles-Dogston autor de "Alicia en el país de las Maravillas" utilizando un lenguaje lógico – matemático utiliza el Diagrama en conjuntos disjuntos haciendo partición del universo.

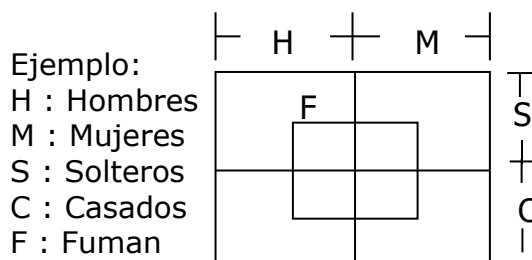


Diagrama Lineal – Hasse

Utiliza segmentos de línea y es utilizado en conjuntos transfinitos e infinitos

Ejemplo:

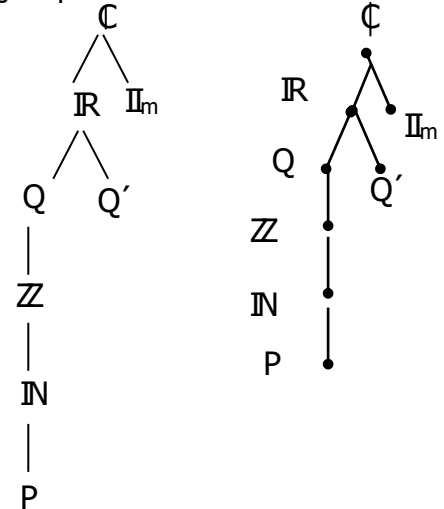


Diagrama Lineal

Diagrama Hasse

Relación de Inclusión (\subset)

$$\begin{matrix} \text{Subconjunto} & \subset & \text{Conjunto} \\ \text{Conjunto} & \subset & \text{Conjunto} \end{matrix}$$

Se dice que un conjunto está incluido en un segundo conjunto, cuando todos los "elementos" del primero forman parte del segundo conjunto.

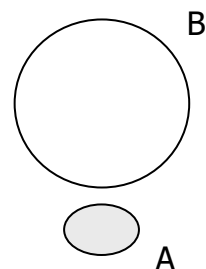
\subset : "incluido o contenido"

$A \subset B$: "A esta contenido en B"

"A es subconjunto en B"

"B contiene a A"

$$A \subset B \equiv \forall x \in A : x \in A \rightarrow x \in B$$



Observación:

El vacío está incluido en cualquier conjunto.

Conjuntos comparables

Se dice que dos conjuntos son comparables cuando por lo menos uno de ellos está incluido en el otro.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge A \neq B) \vee (B \subset A \wedge B \neq A)$$

Ejemplo: Dados los conjuntos:
 $A = \{3,5\}$ $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
 $C = \{2,4,6,7\}$ $D = \{4,7\}$

Son conjuntos comparables: A y B
 B y C; B y D; C y D

Conjuntos Iguales

Se dice que dos conjuntos son iguales cuando ambos poseen los mismos "elementos".

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Ejemplo:
 $A = \{3n + 2 / n \in \mathbb{Z}, 1 \leq n \leq 4\}$
 $B = \{5,14,8,11\}$
 Se observa $A = B$

Aplicación

Dados los conjuntos A y B iguales y C y D iguales donde

$$A = \{a+2, a+1\} \quad C = \{b+1, c+1\}$$

$$B = \{7-a, 8-a\} \quad D = \{b+2, 4\}$$

Hallar: $a+b+c$

Conjuntos Disjuntos o Ajenos

Dos conjuntos se denominan disjuntos cuando no poseen ningún elemento en común

Ejemplo:

$$C = \{x / x \text{ es un hombre}\}$$

$$D = \{x / x \text{ es una mujer}\}$$

\therefore C y D son disjuntos

- Si dos conjuntos son disjuntos ambos serán diferentes.

- Si dos conjuntos son diferentes entonces no siempre serán disjuntos.

Ejemplo:

$$E = \{5,2,a,b\}, F = \{4,3,c,d\}$$

E y F son disjuntos $\rightarrow E \neq F$

$$G = \{1,3,c,d,7\}, H = \{2,8,e,f,c\}$$

$G \neq H$ pero G y H no son disjuntos

Conjuntos Coordinables o Equipotentes

Dos conjuntos serán coordinables cuando se pueda establecer una correspondencia uno a uno entre todos y cada uno de los elementos del primer conjunto con los del segundo conjunto. A dicha correspondencia se le denomina biunívoca y como consecuencia de estos se tiene que las cardinales de estos conjuntos son iguales (si son finitos).

Ejemplo

$$A = \{\text{Lima, Caracas, Bogota, Santiago}\}$$

$$B = \{\text{Perú, Venezuela, Colombia, Chile}\}$$

Se observa que es posible establecer la correspondencia biunívoca:

"... es capital de ..."

De ahí que A y B son coordinables, luego: $n(A) = n(B)$

Clases de Conjuntos

Los conjuntos se clasifican teniendo en cuenta la cantidad de elementos diferentes que poseen según esto tenemos:

Finito: Si posee una cantidad limitada de "elementos" es decir el proceso de contar sus diferentes elementos termina en algún momento.

Ejemplo:

$$N = \{3n + 2 / n \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq n \leq 4\}$$

N es finito pues $n(N) = 4$

$$P = \{x/x \text{ es un día de la semana}\}$$

P es finito pues $n(U) = 7$

Infinito: Si posee una cantidad ilimitada de "elementos". Ejm:

$$M = \{x/x \in \mathbb{Q} \wedge 1 < x \leq 2\}$$

M es infinito pues $n(M) = \dots?$

Conjuntos Especiales

1. Vacío o Nulo. Es aquel conjunto que carece de "elementos".

Notación ϕ ; $\{ \}$.

Ejm.:

$$A = \{x/0 < x < 5 \wedge x^2 = 100\} = \{ \} = \phi$$

$$* \forall A : \phi \subset A$$

$$* \phi \neq \{\phi\}$$

$$* \phi \neq \{ \{ \} \}$$

2. Unitario o Singleton (singular)

Es aquel conjunto que tiene un solo elemento.

$$B = \{x/x > 0 \wedge x^2 = 9\} = \{3\}$$

Aplicación: Si los siguientes conjuntos son unitarios e iguales, calcule $a + b + c$.

$$A = \{(2a + b); c\}$$

$$B = \{(2c - 7); (5b + 2)\}$$

3. Universal: Es un conjunto referencial para el estudio de una situación particular, que contiene a todos los conjuntos considerados. No existe un conjunto universal absoluto y se le denota generalmente por U.

Ejemplo:

$$A = \{2,6,10,12\}$$

$$B = \{x+3/x \text{ es impar} \wedge 0 < x < 10\}$$

Podrán ser conjuntos universales para A y B

$$U = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 13\}$$

$$U = \{0,2,4,6,8,\dots\}$$

4. Conjunto de Conjuntos: También se le denomina familia de conjuntos o clase de conjuntos y es aquel conjunto cuyos elementos son todos conjuntos.

Ejemplo:

$$C = \{\{2,3\}, \{3\}, \{a\}, \{6,b\}, \phi\}$$

$$D = \{\{a,b,c\}, \{2,3,6\}, \{6\}, c, 8\}$$

Se observa que:

C es familia de conjuntos

D no es familia de conjuntos

5. Potencia

El Conjunto de Potencia de A, llamado también "Conjunto de Partes de A", es aquel que está formado por todos los subconjuntos posibles que posee el conjunto A.

Notación $P(A)$

$$\text{Ejemplo: } A = \{x,y\}$$

$$P(A) = \{\phi, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}\}$$

$$n(P(A)) = 4$$

* Los subconjuntos $\phi, \{x\}, \{y\}$ son denominados propios.

$$\boxed{\text{N}^\circ \text{ subconj. de } A = n(P(A)) = 2^{n(A)}}$$

Ejemplo:

$$B = \{x/x \text{ es primo y } x < 10\}$$

$$B = \{2,3,5,7\} \rightarrow n(B) = 4$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{N}^\circ \text{ subconjuntos} \\ \text{de } B \end{array}} = 2^4 = 16$$

$$\boxed{\text{N}^\circ \text{ subconj. Propios de } A = 2^{n(A)} - 1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{N}^\circ \text{ subconjuntos} \\ \text{propios de } B \end{array}} = 2^4 - 1 = 15$$

6. Par Ordenado

Es un conjunto de 2 elementos para los cuales se considera el orden en que están indicados.

Notación (a, b)

Se lee "par ordenado a, b"

a: 1º componente

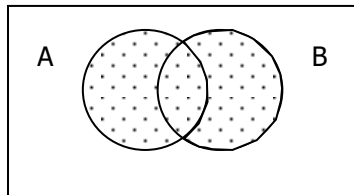
b: 2º componente

$$\boxed{(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d}$$

OPERACIONES CON CONJUNTOS

Unión (U): La unión de 2 o más conjuntos es aquel conjunto conformado por la agrupación de todos los elementos de los conjuntos que intervienen.

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

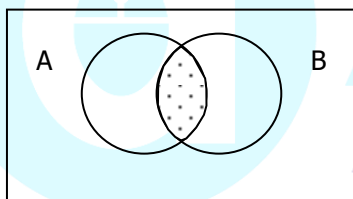


Ejemplo: $A = \{2,3,5\}, B = \{1,7,5\}$
 $\therefore A \cup B = \{2,3,5,1,7\}$

Si: $A \subset B \rightarrow A \cup B = B$

Intersección (\cap) La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a "A" y "B" a la vez.

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

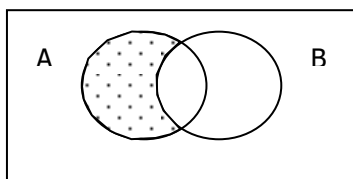


Ejemplo: $A = \{2,3,4,5,6\}$
 $B = \{4,6,7,9\}$
 $\therefore A \cap B = \{4,6\}$

Si $A \subset B \rightarrow A \cap B = A$
 Si A y B son disjuntos, $A \cap B = \phi$

Diferencia (-) El conjunto diferencia (A-B) es aquel que esta formado únicamente por los elementos que pertenecen a A pero no pertenecen a B.

$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$



Ejemplo $A = \{2,4,5,6,7,8\}$

$$B = \{1,3,6,7,9\}$$

$$\therefore A - B = \{2,4,5,8\}$$

$$B - A = \{1,3,9\}$$

Si $A \subset B \rightarrow A \Delta B = B - A$
 Si A y B disjuntos, $A \Delta B = A \cup B$

Diferencia Simétrica

La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o B pero no a ambos.

$A \Delta B = \{x/x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$

Ejemplo:
 $A = \{8,7,6,5,4,2\}$
 $B = \{9,7,6,3,1\}$
 $\therefore A \Delta B = \{2,4,5,8,1,3,9\}$

Si $A \subset B \rightarrow A \Delta B = B - A$
 Si A y B disjuntos, $A \Delta B = A \cup B$

Complemento de A (C_A, A^c, \bar{A}, A')

El complemento de A es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto universal U pero no al conjunto A.

$A^c = A' = \{x/x \in U \wedge x \notin A\} = U - A$

Ejemplo
 $U = \{x/x \in \mathbb{N}, x < 8\}$
 $A = \{1,3,4\}$
 $\therefore A^c = \{0,2,5,6,7\}$

Conjunto Producto o Producto Cartesiano (X)

Dados dos conjuntos A y B se define el conjunto producto como:

$A \times B = \{(a,b)/a \in A \wedge b \in B\}$

Leyes del Algebra de Conjuntos

1. Idempotencia
 $A \cup A = A$
 $A \cap A = A$
2. Conmutativa
 $A \cup B = B \cup A$

Resolución

Si $A = B$
 $\{3a - 8, 44\} = \{10, b^a - 20\}$

$3a - 8 = 10 \rightarrow 3a = 18 \rightarrow a = 6$
 $44 = b^a - 20 \rightarrow b^a = 64$

Reemplazando: $b^6 = 64 = 2^6$
 $a = 6$ $b = 2$

$\therefore a^b = 6^2 = 36$ Rpta.

5. ¿Cuántos subconjuntos propios tiene el conjunto M?

$M = \{x/x \in \mathbb{Z}; -7 < 4x + 1 < 21\}$

Resolución

$-7 < 4x + 1 < 21$
 $-8 < 4x < 20$
 $-2 < x < 5 \rightarrow x = -1, 0, 1, 2, 3, 4$
 $M = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} \rightarrow n(M) = 6$

Nº subconjuntos propios de M = $2^{n(M)} - 1 = 2^6 - 1 = 63$ Rpta.

6. Indicar el cardinal del conjunto

$R = \left\{ x / \sqrt{\frac{x+1}{3}} \in \mathbb{Z}^+, x < 17 \right\}$

Resolución

Para calcular el cardinal del conjunto R. Habrá que saber cuantos valores toma x de acuerdo a las restricciones dadas en el conjunto R.

Para $x < 17$ y que verifique que

$\sqrt{\frac{x+1}{3}} \in \mathbb{Z}^+$ entonces $x = 2, 11$

solamente

Luego $R = \{2, 11\} \rightarrow n(R) = 2$ Rpta.

7. Dados el conjunto $A = \{a, \{a\}, \{\emptyset, \emptyset\}$ cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas.

- I. $\{a\} \in A \wedge \{a\} \subset A$
- II. $\{a\} \subset A \wedge \{\{a\}\} \in A$
- III. $\{\emptyset\} \subset A \wedge \{\{\emptyset\}\} \in A$
- IV. $\emptyset \subset A \wedge \emptyset \in A$
- V. $\{a, \emptyset\} \subset A \wedge \{\{a\}, \{\emptyset\}\} \subset A$

Resolución

I. $\underbrace{\{a\} \in A}_P \wedge \underbrace{\{a\} \subset A}_q ; p \wedge q$ (V) $V \wedge V$

II. $\underbrace{\{a\} \subset A}_P \wedge \underbrace{\{\{a\}\} \in A}_q ; p \wedge q$ (F) $V \wedge F$

III. $\underbrace{\{\emptyset\} \subset A}_P \wedge \underbrace{\{\{\emptyset\}\} \in A}_q ; p \wedge q$ (F) $V \wedge F$

IV. $\underbrace{\emptyset \subset A}_P \wedge \underbrace{\emptyset \in A}_q ; p \wedge q$ (V) $V \wedge V$

V. $\underbrace{\{a, \emptyset\} \subset A}_P \wedge \underbrace{\{\{a\}, \{\emptyset\}\} \subset A}_q ; p \wedge q$ (V) $V \wedge V$

Rpta. 3 son verdaderas

8. En un salón de clase de 100 alumnos, hay diez hombres provincianos, hay 40 mujeres limeñas y el número de mujeres provincianas excede en 10 a número de hombre limeños. ¿Cuántos hombre hay en el aula?

Resolución

Utilizando diagrama CARROLL

Provincianos	Limeños	
10	X	Hombres
X+10	40	Mujeres

U: 100

Del Total

$10 + x + x + 10 + 40 = 100$

$2x + 60 = 100 \rightarrow x = 20$

$\therefore n^\circ$ hombres = $10 + x = 30$ Rpta

9. Un conjunto tiene 1024 subconjunto en total. ¿Cuántos subconjuntos de 6 elementos tendrá?

Resolución

Sabemos que:

$$\text{N}^\circ \text{ subconjuntos de } A = 2^{n(A)}$$

Por datos:

$$\underbrace{1024}_{2^{10}} = 2^{n(A)}$$

$$2^{10} = 2^{n(A)} \text{ entonces } n(A) = 10$$

∴ N° Subconjuntos de 6 elementos $C_6^{n(A)}$

$$C_6^{10} = \frac{10!}{(10-6)! 6!} = \frac{10!}{4! 6!}$$



TEORÍA DE CONJUNTOS II

OBJETIVOS:

- Realizar correctamente operaciones entre conjuntos
- Utilizar de manera eficaz las leyes del álgebra de conjuntos.
- Resolver problemas utilizando los diagramas de Veen-Eulery Lewis Carroll.

Operaciones con Conjuntos

I. Unión o Reunión

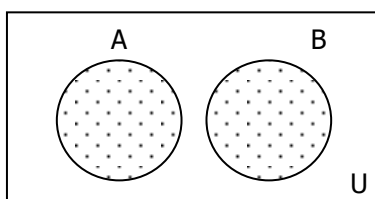
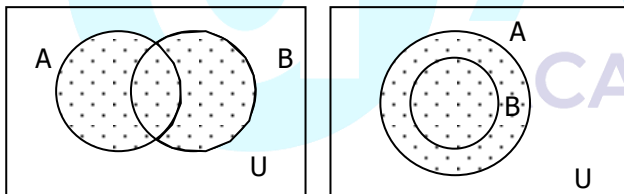
La unión de dos conjuntos "A" y "B" es el conjunto formado por la agrupación de todos los elementos de "A" con todos los elementos de "B".

Notación $A \cup B$, $(A \cup B)$

Simbólicamente se define

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

Posiciones relativas para 2 conjuntos A y B



$$\text{[Sombreadura]} \rightarrow A \cup B$$

Observación: Si $B \subset A \rightarrow A \cup B = A$

Propiedades:

- $A \cup B = B \cup A$ (Conmutativa)
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (Asociativa)
- $A \cup A = A$ (Idempotencia)
- $A \cup U = U$
- $A \cup \phi = A$ (Elemento Neutro)

II. Intersección

La intersección de 2 conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a los dos conjuntos a la vez.

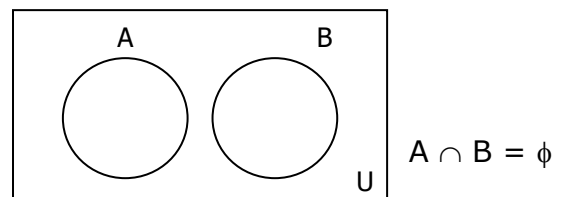
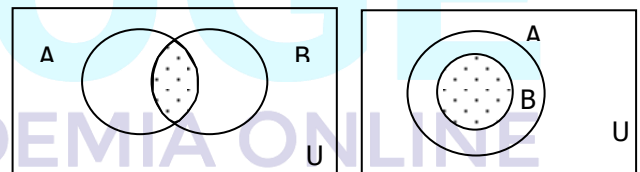
Notación: $A \cap B$, $(A \cap B)$

Simbólicamente se define:

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

Observación: \cap equivale y: Intersección

Posiciones relativas para 2 conjuntos "A" y "B"



$$\text{[Sombreadura]} A \cap B$$

Observación:

- * Si $B \subset A \rightarrow A \cap B = B$
- * Si A y B son conjuntos disjuntos $\rightarrow A \cap B = \phi$

Propiedades:

- $A \cap B = B \cap A$ (Conmutativa)
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Asociativa)
- $A \cap A = A$ (Idempotencia)
- $A \cap U = A$
- $A \cap \phi = \phi$ (Elemento Neutro)

Propiedades Complementarias

Distributiva

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Absorción

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A' \cap B) = A \cup B$$

$$A \cap (A' \cup B) = A \cap B$$

$$(A \cup B) \subset C \Leftrightarrow A \subset C \text{ y } B \subset C$$

Si: $A \subset B \text{ y } C \subset D \Rightarrow (A \cup C) \subset (B \cup D)$

III. Diferencia

La diferencia de 2 conjuntos A y B (en ese orden) es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a "A" pero no a "B"

Notación: $A - B$

Se lee: "A pero no B" (solo A)

Simbólicamente

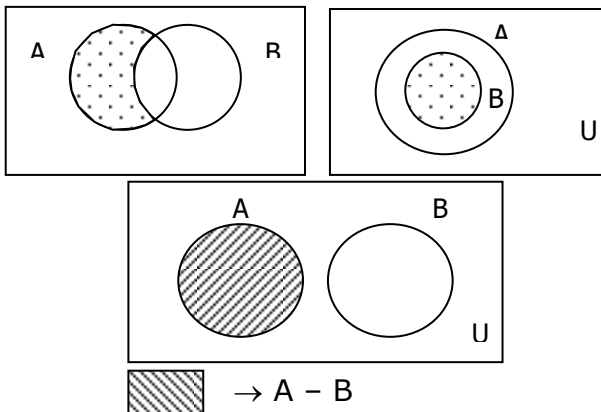
$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

Observación:

$$\text{Si } A \neq B \rightarrow A - B \neq B - A$$

$$\text{Si } A = B \rightarrow A - B = B - A = \phi$$

Posiciones Relativas para 2 conjuntos A y B



Observación:

- Si $B \subset A \rightarrow B - A = \phi$
- Si A y B son disjuntos

$$A - B = A \quad ; \quad B - A = B$$

Ejm:

$$\left. \begin{array}{l} A = \{2,3,4\} \\ B = \{3,4,5,6\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A - B = \{2\} \\ B - A = \{5,6\} \end{array}$$

IV. Diferencia Simétrica

La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos a "A" o "B" pero no a ambos.

Notación: $A \Delta B$

Simbólicamente se define:

$$A \Delta B = \{x/x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}$$

$$A \Delta B = \{x/x \in A \vee x \in B \wedge x \notin A \cap B\}$$

Observación:

$$\text{Si } B \subset A \rightarrow A \Delta B = A - B$$

Si A y B son conjuntos disjuntos

$$A \Delta B = A \cup B$$

Propiedades

- $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
- $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
- $A \Delta A = \phi$
- $A \Delta \phi = A$

Ejm:

$$\left. \begin{array}{l} A = \{2,3,4\} \\ B = \{4,5,3\} \end{array} \right\} A \Delta B = \{2,5\}$$

V. Complemento

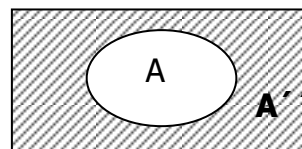
El complemento de A es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto universal U pero no a "A".

Notación: A' , \bar{A} , A^c , $C A$

Simbólicamente:

$$A' = \{x/x \in U \wedge x \notin A\} = U - A$$

Diagrama



Observación:

$$C_B^A = B - A$$

Propiedades

1. $(A')' = A$ Involución

2. $\phi' = U$
 $U' = \phi$

3. $A - B = A \cap B'$

4. $A \cup A' = U$
 $A \cap A' = \phi$

5. **Leyes de Morgan**

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

6. **Caso particular de la Absorción**

$$A' \cup (A \cap B) = A' \cup B$$

$$A' \cap (A \cup B) = A' \cap B$$

Observación

- $n(\phi) = 0$
- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- Si A y B son conjuntos disjuntos $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
- $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Par Ordenado

Es un conjunto que tiene dos elementos (no necesariamente diferentes), en la cual interesa el ordenamiento de estos elementos llamados también componentes



Propiedad:

Dos pares ordenados son iguales si y solo si sus respectivos elementos son iguales.

Es decir:

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Ejemplo:

Aplicación

Si $(x + y, 13) = (31, x - y)$

Hallar: $\frac{x}{y}$

Resolución

Si $(x + y; 13) = (31; x - y)$

$$x + y = 31$$

$$x - y = 13$$

$$\therefore x = \frac{31+13}{2} = 22$$

$$y = \frac{31-13}{2} = 9$$

Luego: $\frac{x}{y} = \frac{22}{9}$ Rpta.

Producto Cartesiano

Dados 2 conjuntos A y B no nulos se denomina producto cartesiano de A y B $(A \times B)$ en ese orden, al conjunto formado por todos los pares ordenados (a,b) tal que las primeras componentes pertenecen al conjunto a y las segundas componentes al conjunto B.

$$A \times B = \{a,b/a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo: Dados los conjuntos A y B

$$A = \{a, b\}$$

$$B = \{c,d\}$$

Forma Tabular:

B c d A a b
A B

a	(a,c)	(a,d)	c	(c,a)	(c,b)
b	(b,c)	(b,d)	d	(d,a)	(d,b)

$$A \times B = \{(a,c), (a,d), (b,c), (b,d)\}$$

$$B \times A = \{(c,a), (c,b), (d,a), (d,b)\}$$

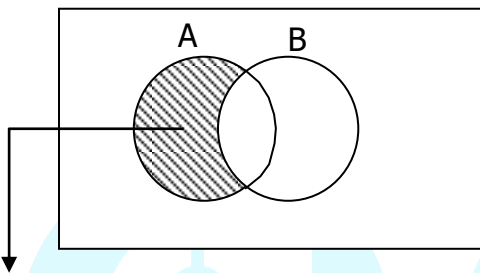
Observamos que:

1. $A \times B \neq B \times A$ en general
2. $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$
3. $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$
A y B son conjuntos finitos
4. $n[A \times B - B \times A] = n[A \times B] - n[A \times B \cap B \times A]$

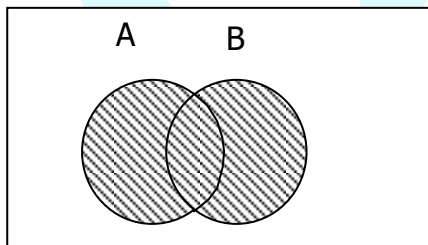
Propiedades

- a. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- b. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- c. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
- d. Si: $A \subset B \Rightarrow A \times C \subset B \times C, \forall C$
- e. Si: $A \subset B$ y $C \subset D$

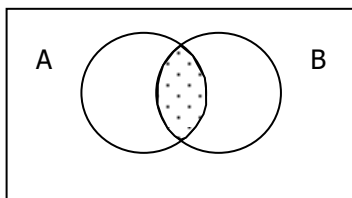
Interpretación de Regiones Sombreadas



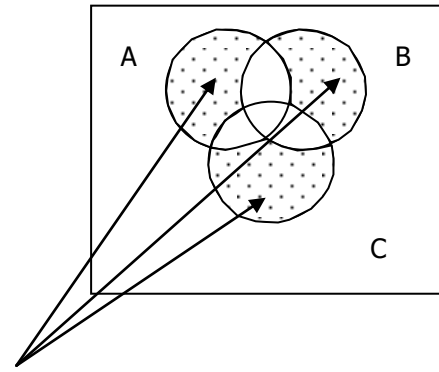
"Sólo A", "exclusivamente A"
o "únicamente A". $(A - B)$



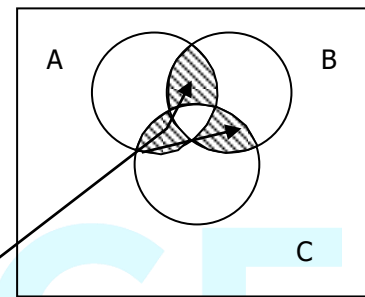
"Ocurre A o B"; $A \cup B$
"Al menos uno de ellos" o
"Por lo menos uno de ellos"



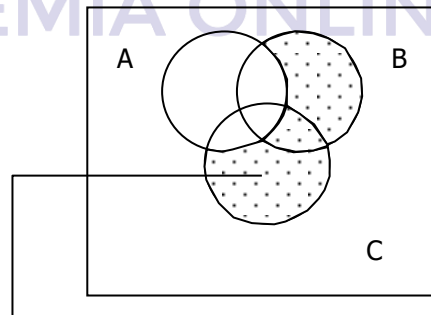
$A \cap B$, "ocurre A y B"
"Ocurre ambos sucesos a la vez"
"Tanto A como B"



"Ocurre solo uno de ellos"
"Únicamente uno de ellos"
"Exactamente uno de ellos"



"Ocurre exactamente dos de ellos"
"Sucede únicamente dos de ellos"



$(B \cup C) - A$
(ocurre B o C pero no A)

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dados los conjuntos
 $A = \{6, \{2\}, \{\phi\}\}$ y
 $B = \{\phi, \{\phi\}, \{\{2\}\}, \{\{6\}\}\}$
 Hallar $P(A) \cap B$

Resolución

Como $A = \{6, \{2\}, \{\phi\}\}$

$$\Rightarrow P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \{6\}, \{\{2\}\}, \{\{\phi\}\} \\ \{6, \{2\}\}, \{6, \{\phi\}\}, \{\{2\}, \{\phi\}\} \\ A, \phi \end{array} \right\}$$

Además $B = \{\phi, \{\phi\}, \{\{2\}\}, \{\{6\}\}\}$
 Luego: $P(A) \cap B = \{\phi, \{\{2\}\}, \{\{6\}\}\}$ Rpta.

2. Dado el conjunto A
 $A = \{1, 2, \{2\}, \{1, 2\}\}$
 Indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones

- I. $\{1, \{2\}\} \subset A$
- II. $\{\{1, \{2\}\}\} \in P(P(A))$
- III. $\{\phi, \{2\}\} \in P(A)$

- a) VVV b) VFV c) VFF
- d) FVV e) VVF

Resolución

Analizando cada caso

I. $\{1, \{2\}\} \subset A$
 $\Rightarrow 1 \in A \wedge \{2\} \in A = \text{Verdadero}$
 $\underbrace{\quad}_V \quad \underbrace{\quad}_V$

II. $\{\{1, \{2\}\}\} \in P(P(A))$
 $\Rightarrow \{\{1, \{2\}\}\} \subset P(A)$
 $\equiv \{1, \{2\}\} \in P(A)$
 $\equiv \{1, \{2\}\} \subset P(A)$
 $\equiv \{1, \{2\}\} \subset A$
 $\equiv 1 \in A \wedge \{2\} \in A = \text{Verdadero}$
 $\underbrace{\quad}_V \quad \underbrace{\quad}_V$

III. $\{\phi, \{2\}\} \in P(A)$
 $\Rightarrow \{\phi, \{2\}\} \subset A$
 $\equiv \phi \in A \wedge \{2\} \in A \equiv \text{Falso Rpta. E}$
 $\underbrace{\quad}_F \quad \underbrace{\quad}_V$

3. De un grupo de 100 alumnos, 49 no llevan el curso de Aritmética, 53 no llevan álgebra y 27 no llevan álgebra ni aritmética. ¿Cuántos alumnos llevan uno de los cursos?

- a) 56 b) 54 c) 52 d) 50 e) 48

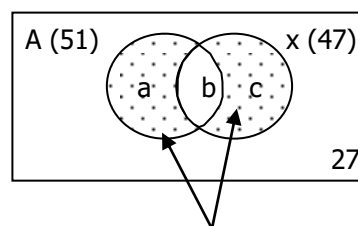
Resolución

Sea A : Aritmética
 X : Algebra

$$n(A') = 49 \rightarrow n(A) = 100 - 49 = 51$$

$$n(X') = 53 \rightarrow n(B) = 100 - 53 = 47$$

Gráficamente



Llevar un solo curso

Por dato:

$$c + 27 = 49 \rightarrow c = 22$$

$$a + 27 = 53 \rightarrow a = 26$$

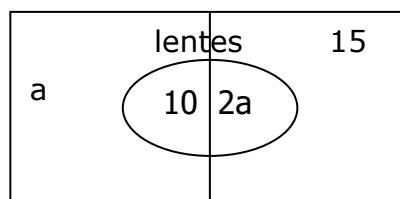
Luego $a + c = 48$ **Rpta. E**

4. Durante un examen se observó en un aula que 15 alumnos miraban al techo y no usaban lentes, 10 usaban lentes y resolvían el examen. El número de alumnos que usaban lentes y miraban al techo era el doble de los que resolvían el examen y no usaban lentes. Si en el salón había 85 alumnos. ¿Cuántos resolvían su examen? (considere que los que no resolvían su examen miraban al techo)

- a) 20 b) 25 c) 24 d) 30 e) 36

Resolución: Gráficamente:

Resuelven examen Miran al techo



En total:
 $3a + 25 = 85$
 $3a = 60$
 $a = 20$

\therefore Resuelven el examen 30 **Rpta. D**

5. Dados los conjuntos A, B y C

$A = \{1,2,3,4,5,6,\dots,21,22\}$
 $B = \{x \in A / x \text{ es un número primo}\}$
 $C = \{x \in A / x \text{ es un número impar}\}$
 Y las proposiciones:

- I. $B \Delta C = \{1,2,9,15,21\}$
- II. $(B \cap C)$ tiene "7 elementos"
- III. $n(C - B) - n(B - C) = 2$
- IV. $n[A - (B \cup C)] = 9$

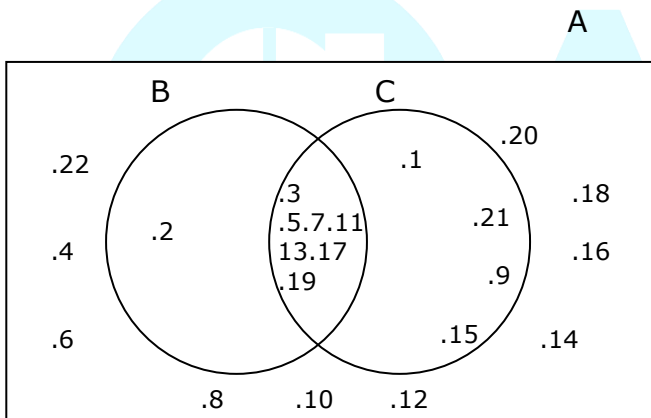
Son verdaderas:

- a) I, II y III b) I, III, IV
- c) II, III y IV d) I, II y IV
- e) I y II

Resolución

$A = \{1,2,3,4,5,6,\dots,21,22\}$
 $B = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$
 $C = \{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21\}$

Graficando



Luego:

- I. $B \Delta C = \{1,2,9,15,21\} \therefore (V)$
- II. $n(B \cap C) = 7 \therefore (V)$
- III. $n(C - B) - n(B - C) = 2$
 $4 - 1 = 3 \therefore (F)$
- IV. $n(A - (B - C)) = 9 \therefore (F)$
 $n(A - (B \cup C)) = 10$ **Rpta. E**

6. Si

$A = \{x \text{ es impar} / 6 < x \leq 11\}$

$B = \left\{ \frac{3n-1}{2} \in \mathbb{Z} / 0 < n < 7 \right\}$

Calcular $n[P[(A \times B) - (B \times A)]]$

- a) 2^{20} b) 2^{22} c) 2^{24}
- d) 2^{26} e) 2^{28}

Resolución:

$A = \{7,9,11\}$

$B = \left\{ \frac{3n-1}{2} \in \mathbb{Z} / -\frac{1}{2} < \frac{3n-1}{2} < 10 \right\}$

$B = \{0,1,2,3,\dots,9\}$

$n[A \times B - B \times A] = n[A \times B] - n[B \times A]$

$n[A \times B - B \times A] = 3 \times 10 - 2 \times 2 = 26$

$n[P[A \times B - B \times A]] = 2^{26}$

7. De 308 personas interrogadas, se determinó que el número de los que leen solamente "EL AMAUTA" y "EL VOCERO" es:

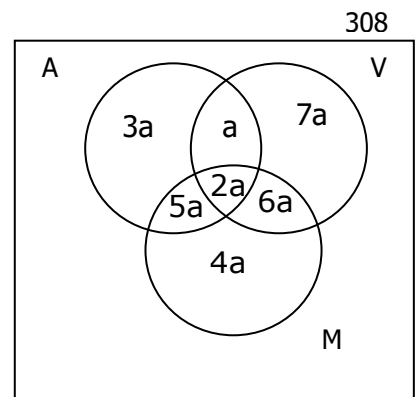
- * $\frac{1}{3}$ de los que leen solo "EL AMAUTA"
- * $\frac{1}{4}$ de los que leen solo "EL MERCURIO"
- * $\frac{1}{7}$ de los que leen solo "EL VOCERO"
- * $\frac{1}{3}$ de los que leen "EL AMAUTA" y "EL VOCERO"
- * $\frac{1}{6}$ de los que leen "EL VOCERO" y el "MERCURIO" solamente.
- * $\frac{1}{12}$ de los que leen "EL AMAUTA" o "EL MERCURIO" pero no "EL VOCERO"

Si todas las personas interrogadas leen al menos uno de estos diarios. ¿Cuántas de estas personas leen o bien "EL AMAUTA" o bien "EL VOCERO"?

- a) 110 b) 121
- c) 132 d) 99 e) 120

Resolución:

Gráficamente:



$$28a = 308$$

$$\therefore a = 11$$

Nos piden $\rightarrow 11$
 $3a + 7a = 10a = 110$
 \therefore **Rpta. A**

PROBLEMAS PARA LA CLASE

- Si: $A = \{5, \{6\}, \{5,6\}, 8\}$
 ¿Cuántas proposiciones son verdaderas?
 - $5 \in A$ - $\{6\} \in A$
 - $6 \in A$ - $7 \in A$
 - $\{5\} \in A$ - $\{\{6\}\} \notin A$
 - $\{5,6\} \in A$ - $\{\{6\}, 8\} \in A$
 - $\{8\} \subset A$ - $\emptyset \in A$
 a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) Todas
- Dados los conjuntos:
 $A = \{1, 2, \{1, 2\}, 3\}$
 $B = \{\{2, 1\}, \{1, 3\}, 3\}$
 Hallar el conjunto:
 $[(A-B) \cap B] \cup (B-A)$
 a) $\{1\}$ b) $\{3\}$ c) $\{\{1, 3\}\}$
 d) $\{2, 3\}$ e) $\{1, 2, 3\}$
- De un grupo de 100 estudiantes se obtuvo la siguiente información: 28 estudian Inglés; 30 estudian alemán, 42 estudian francés; 8 inglés y alemán; 10 inglés y francés; 5 alemán y francés; 3 los tres idiomas. ¿Cuántos estudiantes no estudian ningún idioma?
 a) 15 b) 25 c) 10 d) 30 e) 20
- Una persona come pan con mantequilla o mermelada cada mañana durante el mes de febrero; si 22 días comió pan con mermelada y 12 días con mantequilla. ¿Cuántos días comió pan con mermelada y mantequilla?
 a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 5
- En una competencia atlética con 12 pruebas participaron 42 atletas, siendo los resultados: 4 conquistaron medalla de oro plata y bronce; 6 de oro y plata, 8 de plata y bronce; 7 de oro y bronce. ¿Cuántos atletas no conquistaron medalla?
 a) 18 b) 20 c) 23 d) 24 e) 25
- De una reunión de 100 personas se sabe de ellas que 40 no tienen hijos, 60 son hombres, 10 mujeres están casadas, 25 personas casadas tienen hijos, hay 5 madres solteras. ¿Cuántos hombres son padres solteros?
 a) 30 b) 35 c) 40 d) 20 e) 25
- ¿Cuántas de las siguientes proposiciones, para conjunto, son correctas?
 * $A-B = A \cap B'$
 * $A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$
 * $(A \cup B)' = A' \cap B'$
 * $n(A-B) = n(A) - n(B)$
 * $n[(A \cap B)'] = n(\cup) - n(A \cap B)$
 a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5
- Para los conjunto A y B se tienen que: $A \cap B$ tiene 128 subconjuntos, $A-B$ tiene 64 subconjuntos y $A \times B$ tiene 182 elementos. Determinar el cardinal de $A \Delta B$.
 a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14
- Durante el mes de febrero, Juan visitó a su enamorada, fue a la Universidad o trabajo. Si no hubo día en que se dedicara a sólo dos actividades y además visitó 12 días a su enamorada, fue a la universidad 18 días y trabajó 20 días ¿Durante cuántos días sólo trabajó?
 a) 1 b) 7 c) 9 d) 11 e) 6

10. Considere 3 conjuntos A, B y C contenidos en U, tales que:
 * $B \cap A = B$
 * $n(C - A) = 50$
 * $n(A \cap C) = 2n(B - C)$
 * $n[(A \cap B)^c - C] = n(c) = 90$
 Hallar: $n[U]$
 a) 120 b) 150 c) 180
 d) 200 e) 100
11. En una reunión hay 150 personas. Un grupo de ellos se retiran con sus respectivas parejas, de los que quedan los $\frac{2}{9}$ son mujeres y los $\frac{3}{14}$ son varones solteros. ¿Cuántas mujeres asistieron en total?
 a) 28 b) 30 c) 36 d) 40 e) 48
12. En una tienda se observó que el total de personas era 50, de las cuales:
 * 6 vendedores usaban bigotes
 * 4 vendedores usan mandil
 * 32 vendedores no usan mandil
 * 8 personas usan bigotes
 * 9 personas usan mandil
 ¿Cuántos no son vendedores, ni usan mandil, ni bigotes?
 a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3
13. Sean los conjuntos:

$$A = \left\{ x^4 + 3\sqrt{x} / \frac{x+3}{2} \in \mathbb{Z}; -7 < x < 10; x \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$B = \left\{ 1 - x^3 / x^2 \geq 2 \wedge \left(0 < \left(\frac{x+2}{3} \right) < 5 \right); x \in \mathbb{Z} \right\}$$
 Calcular $n[P(A \Delta B)]$
 a) 2^{16} b) 2^9 c) 2^{12}
 d) 2^{19} e) 2^{21}
14. En el distrito de Bellavista - Callao se realizó una encuesta a 140 familias sobre el uso de algunos de los siguientes artefactos: TV, radio, refrigeradora. Se obtuvo la siguiente información: 85 familias tiene por lo menos 2 artefactos y 10 familias no disponen de ningún artefacto. ¿Cuántas familias tienen exactamente un sólo artefacto?
 a) 35 b) 40 c) 45 d) 50 e) 55
15. A y B son dos conjuntos tales que:
 $n_{(A \cup B)} = 12$; $n_{(A \cap B)} = 7$;
 $n_{(A)} = n_{(B)} + 1$; sabiendo que:
 $n_{(A - B)} = n_{([A \cup B]^c)}$.
 Calcular ¿Cuántos subconjuntos propios tiene \bar{A} ?
 a) 3 b) 7 c) 15 d) 31 e) 63
16. ¿Cuántos de los 1600 alumnos están inscritos en teatro pero no en canto, sabiendo que: 600 están inscrito en teatro, 650 en canto, 250 en teatro y baile, 350 en canto y baile, 200 en teatro y canto; 950 en baile, 150 llevan los 3 cursos?
 a) 400 b) 450 c) 500
 d) 550 e) 600
17. Simplificar la expresión conjuntista:
 $[A \cap (C \Delta A)] \cup [B \cap C]^c \cap A] \cup [B \cup (A \cap B^c)]$
 a) A b) B c) B^c
 d) $A \cup B^c$ e) $A \cup B$
18. En un vagón de tren se realizan una encuesta sobre el uso de cigarrillos. De los 41 pasajeros, 21 personas están sentadas y hay 16 mujeres en total; de los que fuman 5 hombres están sentados y 2 mujeres están paradas; de los que no fuman 8 mujeres están sentadas y 10 hombres están parados. Hallar cuántas mujeres que están paradas no fuman si los que fuman en el total suman 19.
 a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5

NUMERACIÓN Y CONTEO

NUMERACIÓN:

Conjunto de reglas y principios que hacen posible la correcta lectura y escritura de los números.

Numeral:

Representación de un número en forma simbólica, jeroglífica, gráfica u pictográfica.

HINDO-ARABIGO: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

ROMANO: I,V,X,L,C,M,D

BABILONIA: $\Upsilon = 1 < = 10$

EGIPCIO: $\text{I} = 1, \text{O} = 10, \text{=200}$

MAYAS: $\square \cdot \bullet \bullet \text{---} \cdot \text{=} \text{=}$
 0 1 2 5 6 10 11

Actualmente: $\overline{abc}_n, \overline{3ab}_4, 153_{10}$

Ejemplo de numerales
 5, IIII, $\cdot \cdot \cdot$ cinco, five

PRINCIPIOS

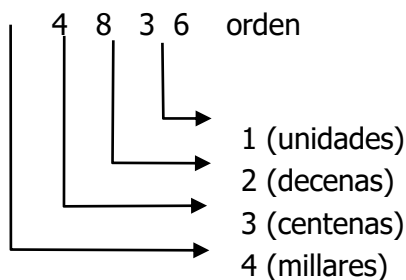
1. DEL ORDEN

Toda cifra en el numeral tiene un orden, por convención se enumera de derecha a izquierda.

Ejemplo: \longrightarrow

Lugar	1º	2º	3º	4º
Número	1	9	9	9
Orden	4	3	2	1

Ejemplo: \longleftarrow



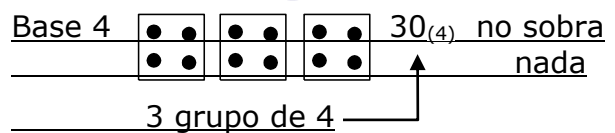
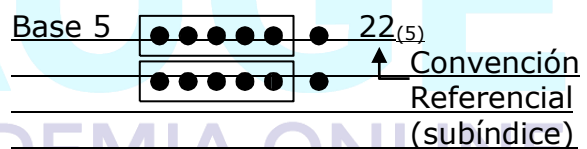
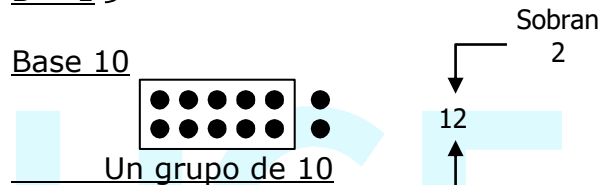
OBSERVACIÓN

Algunos autores consideran a la cifra de las unidades simples como la cifra de orden cero.

2. DE LA BASE

Es un número referencial que nos indica como se agrupan las unidades de un orden cualquiera para formar la unidad colectiva del orden inmediato superior. Sea "B" una base

$$\left. \begin{matrix} B \in \mathbb{Z} \\ B > 1 \end{matrix} \right\} \text{Base: } 2,3,4,5,6\dots$$



REGLA DE SIGNOS

En una igualdad de 2 numerales a mayor numeral aparente le corresponde menor base.

a1) Ejm: $32_{(x)} = 120_{(z)}$

Se cumple: $Z < x$

a2) Ejm: $\overline{\text{OPTIMUS}}_{(E)} = \overline{\text{INGRESO 99}}_{(F)}$

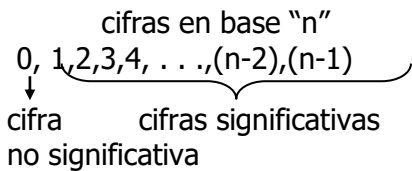
Se cumple: $F < E$

a3) Ejm: $\overline{\text{CEPREUNAC}}_{(P)} = \overline{\text{INGRESO2001}}_{(F)}$

Se cumple: $F < P$

3. DE LAS CIFRAS

Las cifras son números naturales inclusive el cero, que siempre son menores que la base en la cual son empleadas o utilizadas.



CIFRA MAXIMA: n-1

CIFRA MINIMA: 0

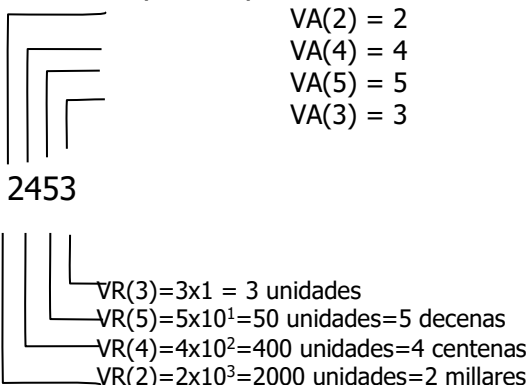
- El cero no tiene valor por si mismo sino únicamente valor posicional es decir por el orden que ocupa.
- Así pues, cada cifra dentro de un numeral tiene un valor digital o valor absoluto y un valor de posición o valor relativo.

VALOR ABSOLUTO (VA)

Es el valor que tiene la cifra por su apariencia o figura.

VAPOR RELATIVO (VR)

Es el valor que tiene una cifra de acuerdo al orden que ocupa dentro de un numeral.



DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA

Viene a ser la suma de los valores relativos de cada una de sus cifras.

$$2453 = \underbrace{\text{VR}(2)+\text{VR}(4)+\text{VR}(5)+\text{VR}(3)}_{\text{D.P.}}$$

$$3796 = 3 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6$$

$$\overline{abba} = ax10^3 + bx10^2 + bx10^1 + a$$

$$\overline{abcd}_n = an^3 + bn^2 + cn + d$$

DESCOMPOSICIÓN POLINOMICA POR BLOQUES

$$\overline{abab} = \overline{ab} \times 10^2 + \overline{ab} = 101 \overline{ab}$$

$$\overline{abcabc} = \overline{abc} \times 10^3 + \overline{abc} = \overline{abc}(1001)$$

$$\overline{abab}_n = \overline{ab}_n \cdot n^2 + \overline{ab}_n \cdot 1 = \overline{ab}_n(n^2 + 1)$$

CAMBIOS DE BASE

1) DE BASE N A BASE 10 (N ≠ 10)

* Expresar 3576₍₈₎ en base 10

Usando Ruffini

	3	5	7	6
8	↓	24	232	1912
	3	29	239	1918

→ 3576₈ = 1918₁₀

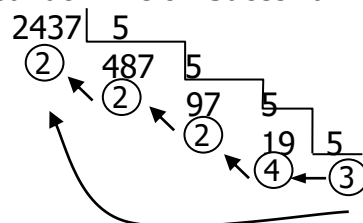
* Expresar 1323₄ en base 10

por descomposición polinómica
1323₄ = 1.4³ + 3.4² + 2.4¹ + 3 = 123

2) De Base 10 a Base n (n ≠ 10)

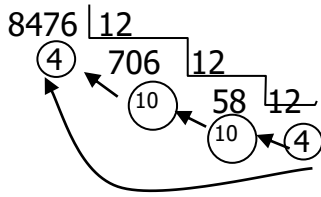
* Expresar 2437 en base 5

Usando División Sucesiva



∴ 2437 = 34222

* Expresar 8476 en base 12
Usando división sucesiva



$\therefore 8476 = 4 \alpha \alpha 4_{(12)}$

OBS:
 α = Diez = 10 = A
 β = once = 11 = B
 γ = Gamma = 12 = C

NUMERAL CAPICUA

Es aquel número que visto y leído de derecha a izquierda y viceversa nos representa el mismo numeral.

Ejemplo:

ana, abba
Somos, Radar,
reconocer, oso

A los numerales capicúas que expresan alguna palabra con sentido se le denomina PALINDROMAS

Numeral capicúa de 2 cifra, aa
 Numeral capicúa de 3 cifra, aba, aaa
 Numeral capicúa de 4 cifra, abba, aaaa

PROPIEDADES

Propiedad (1)

$$N = \underbrace{(x-1) \dots (x-1)}_{k \text{ cifra}} = x^k - 1$$

Problema Resueltos

1. Calculo "x" si:
 $(x-1)(x-1)(x-1)(x-1)_{(x)} = 255$

- a) 2 b)3 c)4 d)5 e)6

Resolución

$$\underbrace{(x-1)(x-1)(x-1)(x-1)}_{(x)} = x^4 - 1 = 255$$

$k = 4$ cifras
 $x^4 = 256 = 2^8 = (2^2)^4 = 4^4$
 $\therefore x = 4$

2. Sabiendo que los numerales están correctamente escritos

$\overline{C42}_8, 43_a; \overline{a5}_b; \overline{b42}_c$

Hallar a+b+c

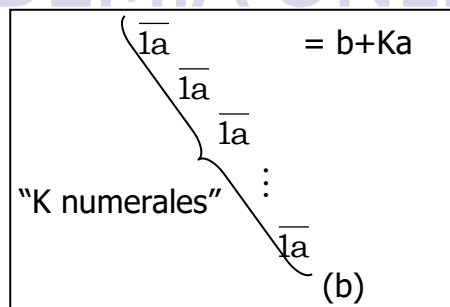
- a) 15 b)16 c)17 d)18 e)19

Resolución

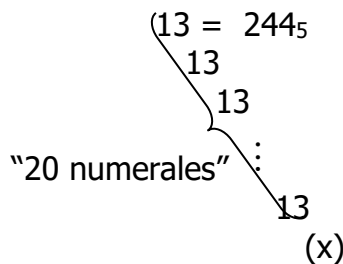
$$\left. \begin{array}{l} \overline{43}_a \rightarrow 4 < a \\ \overline{a5}_b \rightarrow a < b \\ \overline{b42}_c \rightarrow b < c \\ \overline{C42}_8 \rightarrow c < 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 < a < b < c < 8 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 5 \quad 6 \quad 7 \end{array}$$

$\therefore a + b + c = 18$ Rpta.

Propiedad (2)



3. Si



Hallar "x"

Resolución

Aplicando Propiedad (2) y descomponiendo polinómicamente $x + 20(3) = 244_5$

$$\begin{array}{r} \downarrow\downarrow\downarrow \\ 5^251 \end{array}$$

$$x+60=50+20+4$$

$$\therefore x = 14 \text{ Rpta}$$

4. Calcular $a+b+n$ si:

$$\begin{array}{r} + \quad - \\ \overline{ab5}_n = \overline{1n4}_7 \\ - \rightarrow + \end{array}$$

$$\therefore 5 < n < 7$$

se deduce $n = 6$

$$\overline{ab5}_6 = 164_7 \Rightarrow \overline{ab5}_6$$

$$\begin{array}{r} \downarrow\downarrow\downarrow \\ 7^271 \end{array}$$

$$= 49 + 42 + 4 \rightarrow \overline{ab5}_6 = 95_{10}$$

Por división sucesiva

$$\begin{array}{r} 95 \overline{) 6} \\ \underline{5} \\ 15 \\ \underline{3} \\ 12 \\ \underline{6} \\ 6 \\ \underline{6} \\ 0 \end{array}$$

$$235_6 = \overline{ab5}_6$$

$$a=2 \quad b=3$$

$$\therefore a+b+n = 11 \text{ Rpta.}$$

PROBLEMAS PARA LA CLASE

1. Si las siguientes numerales $\overline{a}_{(4)}, \overline{bb}_{(c)}, \overline{2c}_{(a)}$ está bien representados. Calcular $a + b + c$

a) 5 b) 4 c) 6 d) 7 e) 8

2. Hallar $(a + b)$ si:

$$\overline{aba}_{(7)} = 221$$

a) 5 b) 6 c) 4 d) 7 e) 9

3. Si $\overline{1(a+1)a1}_{(4)} = \overline{1a1}$
Hallar a^2

a) 9 b) 4 c) 8 d) 16 e) 1

4. Hallar $a + b$ si se cumple:

$$\overline{aba}_8 = 1106_n$$

a) 5 b) 6 c) 4 d) 7 e) 8

5. Al escribir el número 423_5 en base 10 obtenemos

a) 103 b) 108 c) 113 d) 118 e) 123

6. Cuántos números enteros son mayores que 23_4 pero menores que 32_6 .

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

7. Sean los numerales

$$\overline{213}_{(m)}, \overline{10m}_{(n)}, \overline{2n4}_{(p)}, \overline{mnp}_{(7)}$$

Calcular $m + n + p$

a) 12 b) 14 c) 15 d) 17 e) 18

8. Si $1122_3 = \overline{abcdef}_{(n)}$

Hallar $a + b + c + d + e + f + n$

a) 4 b) 3 c) 5 d) 6 e) 2

9. Dado el número

$$N = \overline{(a+1)a(a+1)a(a+1)}_{(a+2)}^2$$

Calcular: $P_{(a)}$ si $P_{(x)} = x^2 + x + 2$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) 7

9. Si $\overline{a(2a)b}_{(a+b)} = \left(\frac{a}{2}\right)bb$

Hallar $a \times b$

a) 4 b) 5 c) 12 d) 7 e) 8

10. Si $\overline{4abc}_5 = \overline{2pbo}_n$

$$\text{y } \overline{bpb}_7 = \overline{7bn}_9$$

Calcular $a + b + c + n + p$

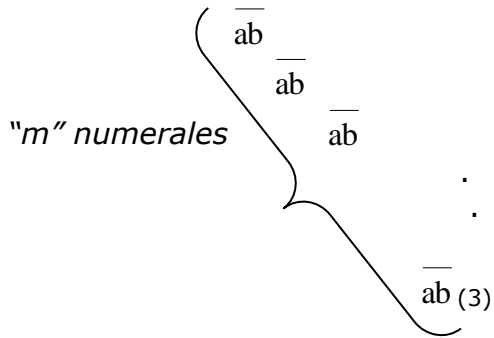
a) 17 b) 18 c) 32 d) 24 e) 16

11. Si se cumple que:
 $(a + 2)(2a - 5)(a - 6)a = (2b + 1)nm(2b + 1)_{12}$

Calcular $L = a + b + m + n$

a) 25 b) 27 c) 26 d) 24 e) 28

12. Sabiendo que: $\overline{abm} = \overline{14(1+m)} + \overline{10}_2$



Calcular $a + b + m$

a) 5 b) 7 c) 8 d) 6 e) 4

13. Si $\overline{aba}_n = \overline{bcn}_m$
 Hallar "c" sabiendo que $b > 4$, $m < 9$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

14. Sea el numeral $\overline{4a31}_6$. Halle la suma de cifras a base $(6+a)$ sabiendo además que este numeral es el mayor posible.

a) 13 b) 23 c) 14 d) 24 e) 18

15. Si $2407_n = 1687_m$ calcular $m + n$

a) 20 b) 22 c) 24 d) 26 e) 28

16. Si se cumple:

$\overline{cbd} = \overline{aaba}_9$

$\overline{dc} = \overline{1010}_4$

Hallar $a + b + c + d$

a) 14 b) 10 c) 19 d) 15 e) 20

17. El siguiente numeral esta mal escrito 8989898. Halle la suma de cifras del numeral equivalente de la base 2

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

18. Si $\overline{ac}_b = \overline{cb}_{(a+2)}$
 Además $a + b + c = 24$
 Hallar \overline{ac} en base 6

a) 223_6 b) 224_6 c) 231_6
 d) 225_6 e) 233_6

19. Si:
 $M = \frac{1}{5^1} + \frac{2}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{2}{5^6} + \frac{1}{5^7} + \dots$

Hallar M:

a) $7/24$ b) $17/24$ c) $27/24$
 d) $37/24$ e) $27/124$

20. Si $\overline{(2a)(2a)(2a)}_8 = \overline{a06}_{(n-1)}$
 Hallar n
 a) 3 b) 10 c) 11 d) 12 e) 13

21. Calcular $a + b + c$
 Si $\overline{abcd}_7 = \overline{42d}_{10}$

a) 5 b) 6 c) 4 d) 10 e) 13

22. Si se cumple:
 $\overline{(n-1)(n-1)(n-1)}_n = \overline{(2n-1)(2n-1)}_{2n}$
 Hallar n

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

CONTEO

Conceptos Básicos

* **Sucesión:** Es una función cuyo dominio son los números entero positivos.

Ejemplo: $f_{(n)} = \frac{n+2}{n}$

n	1	2	3	4	5	...	50
f(n)	3	2	5/3	3/2	7/5	...	26/25

También se dice que en una sucesión es el ordenamiento de números o cantidad que tienen una regla de formación.

* **Serie.** Es la suma de los términos de una sucesión

Ejemplo:
 $P = 3 + 2 + 5/3 + 3/2 + 7/5 + \dots + 26/25$

* **Progresión Aritmética (P.A) de 1º Orden**

Es una sucesión donde la diferencia de 2 términos consecutivos es un valor constante llamado razón.

Ejemplo:
 P.A. 4,6,8,10,12..... (CRECIENTE)
 P.A.: 1/2,1,3/2,2,5/2,.....(CRECIENTE)
 P.A.:25,23,21,19(DECRECIENTE)

NOTACION:

P.A.: $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$

$a_1 = 1^\circ$ término

$a_n =$ último término

n : # términos

r : razón

En general: $a_n = a_1 + (n-1) r$

CONTEO DE NUMEROS

Fórmula para hallar el número de términos en una progresión aritmética.

$$N^\circ \text{ término} = \frac{\text{último término} - \text{anterior al primero}}{\text{razón}}$$

Ejemplo: Determinar el número de términos en:

a) 24, 27, 30, ..., 726
 $\rightarrow \# \text{ término} = \frac{726 - 24}{3} = \frac{702}{3} = 235$

2) Cuántos términos tiene la progresión aritmética

- a) 7,9,11,...,421
Rpta. 208
- b) 12,17,22,...527
Rpta. 104

Observación

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

$$n = \frac{a_n - (a_1 - r)}{r}$$

Dada la P.A.
 P.A. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_p, \dots, a_q, \dots, a_n$
} p términos } q términos

Siempre se cumple:
 i) La suma de los términos equidistantes de los extremos siempre es constante

$$a_1 + a_n = a_p + a_q$$

ii) **Término Central (a_c)**
 * Si n es impar

$$a_c = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

* Si n es par y no hay término central

$a_1 + a_n = a_p + a_q$

$$S = \frac{(a_1 + a_n)}{2} n$$

SUMA DE UNA PROGRESION ARITMETICA

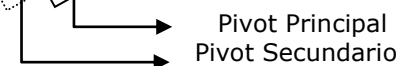
* **Progresión Aritmética 2º Orden**

Sea la Sucesión:

C $\rightarrow a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$

B $\rightarrow b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$

A $\rightarrow c_1, c_1, c_1, \dots, c_1$



$$T = \left(\frac{A}{2}\right)n^2 + \left(B - \frac{A}{2}\right)n + C$$

$$S = a_1C_1^n + b_1C_2^n + c_1C_3^n$$

Cantidad de cifras en una serie natural

Dada la sucesión
1,2,3,4,5,...(N-1), N

N numeral de "k" cifras entonces

$$\text{Nº cifras} = (N + 1)k - \underbrace{111\dots 1}_{K \text{ cifras}}$$

Ejemplo:
Cuántas cifras se usan en la numeración de un libro de 350 hojas.

Resolución:

350 hojas = 700 páginas

La numeración es:
1,2,3,4,...,700

$$\text{Nº cifras} = 701 \times 3 - 111 = 2103 - 111$$

Nº cifras = 1992

Ejemplo:
Determinar la cantidad de cifras

- a) Del 1 al 38
- b) Del 1 al 324
- c) Del 1 al 3999

Análisis Combinatorio

Se reconoce del siguiente modo:
¿Cuántos numerales de esta forman existen?

a) ¿Cuántos números de 3 cifras existen?

Sea $N = \overline{abc}_{10} \quad a \neq 0$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \downarrow \downarrow & & \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 9 & 9 & 9 \\ 9 \times 10 \times 10 & = & 900 \text{ números} \end{array}$$

b) Cuántos numerales de esta forma existen

$$\overline{a\left(\frac{2a+1}{3}\right)(b-1)\left(\frac{b}{2}\right)(c-2)}_9$$

Rpta. 1026 números

Método Combinatorio

- a) ¿Cuántos números pares de 3 cifras existen?
- b) ¿Cuántos números capicúas de 5 cifras tienen un sólo "6" en su escritura?
- c) ¿Cuántos números de la forma $a(a+3)(b-2)(b+1)$ existen?

Resolución:

<p>a) \overline{abc}</p> $\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ \cdot & \cdot & 6 \\ \cdot & \cdot & 8 \\ \hline 9 & 9 & \\ 9 \cdot 10 \cdot 5 & = & 450 \end{array}$	<p>b) \overline{abcba}</p> $\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 6 & & \\ 2 & 1 & & & \\ 3 & 2 & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \hline 6 & 6 & & & \text{se excluyen} \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \hline 9 & 9 & & & \\ 8 \cdot 9 \cdot 1 & = & 72 \end{array}$
--	---

c) $a(a+3)(b-2)(b+1)$

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \hline 6 & 8 \\ 6 \times 7 & = 42 \end{array}$$

d) ¿Cuántos números de 3 cifras, se escriben con un 8, con 9 y algunas otra cifra diferente de los anteriores?

Resolución:

CASOS	$\overline{89a}$	$\overline{8a9}$	$\overline{a89}$
	0	0	1
	1	1	2
	2	2	.
	.	.	.
	.	.	.
	.	.	.
	$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{7}$
Permutando	$\overline{8x}$	$\overline{8x}$	$\overline{7x}$
8 y 9	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$
	16	16	14

Cantidad de números = **46**

PROBLEMAS PARA RESOLVER EN CLASE

1. Calcular cuantas cifras tiene el término de lugar 77 de la siguiente progresión $42_{(6)}; 45_{(6)}; 52_{(6)}; \dots$
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6
2. ¿Cuántos términos tiene la siguiente secuencia $8_{(60)}; 9_{(59)}; \alpha_{(58)}; \beta_{(57)}; \dots$
a) 17 b) 18 c) 19 d) 25 e) 26
3. Hallar el término de lugar \overline{ba} de la siguiente progresión aritmética $\overline{a8b}; \overline{a93}; \overline{b04}; \overline{ba5}; \dots$
a) 302 b) 303 c) 352
d) 402 e) 403
4. ¿Cuántos términos tiene la siguiente progresión aritmética? $\overline{ab_n}; \overline{ba_{(n+1)}}; \overline{88_{(n+2)}}; \dots; \overline{64_{(n+1)}}$
a) 14 b) 18 c) 23 d) 24 e) 72

5. ¿Cuántos términos tiene la siguiente secuencia?
 $1001^{11}; 1111^{22}; 1221^{33}; \dots, \overline{abba}^{bb0}$
a) 70 b) 80 c) 90
d) 101 e) 110
6. Si los términos "a" y "a + 1" de una progresión aritmética son 251 y 259 respectivamente. Hallar la suma del primer y último término de la serie sabiendo que antes del término del lugar "a" hay 30 términos y después del término de lugar "a+1" hay 45 términos.
a) 330 b) 339 c) 397
d) 630 e) 679
7. En la siguiente sucesión $13_x; 24_{(x+1)}; 35_{(x+2)}; \dots$
Se cumple que la diferencia entre el 18^{avo} y décimo término es 264. Calcular la suma de cifras correspondientes a la base duodecimal.
a) 16 b) 17 c) 18 d) 19 e) 20
8. Hallar el máximo valor que puede tomar el último término de la siguiente progresión aritmética $\overline{ab_4}; \overline{ba_5}; \overline{(b+1)(a+1)_5}; \dots; \overline{mn_9}$
a) 85_9 b) 86_9 c) 87_9 d) 88_9 e) N.A.
9. Si la siguiente progresión aritmética $\overline{a3_n}; \overline{a5_n}; \overline{a7_n}; \overline{b0_n}; \dots; \overline{2ma_n}$
Tiene 57 términos. Hallar $a+b+m+n$
a) 20 b) 21 c) 22 d) 23 e) 25
10. Los siguientes números se llaman "números triangulares"
 $1; 3; 6; 10; \dots$
Cuál es el vigésimo número triangular?
a) 180 b) 210 c) 215
d) 220 e) 246

11. Determinar el número de términos de la siguiente progresión
8;18;38;68;, 1908
a) 16 b)17 c)18 d)19 e)20
12. Cuando tipos de imprenta se emplearon para imprimir la siguiente secuencia.
 $100^{77}; 100^{78}; 100^{79}; \dots; 100^{300}$
a) 941 cifras b)1321 cifras
c) 1426 cifras d) 1584 cifras
e) 2403 cifras
13. Si se escribe la serie de los números naturales a partir del 1, sin separar las cifras. ¿Cuál es en esta serie la cifra que ocupa el 1992º lugar?
a) 0 b)1 c) 2 d) 5 e)6



CUATRO OPERACIONES

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

OBJETIVOS:

- Deducir las operaciones de adición y sustracción como una relación binaria.
- Establecer Relaciones Binarias con los elementos de dos conjuntos.
- Deducir las propiedades que cumplen los elementos que forman parte de la adición y sustracción.
- Aplicar las propiedades en situaciones concretas.

ADICIÓN

La adición es una operación binaria, la cual es representada mediante la ayuda del símbolo + y asigna a cada pareja de elementos un tercer número como resultado de la operación.

$$\underbrace{2 \text{ y } 3} \quad + \quad \underbrace{2 + 3}$$

Pareja de elementos Operación Número Asignado como Resultados

Si utilizamos el concepto de par ordenado podemos expresar la noción anterior de la siguiente forma.

$$\underbrace{2, 3} \quad (+) \quad \underbrace{2 + 3}$$

Par Ordenado Operación
Resultado de adición (Considere el orden)

Sin embargo es usual que la expresemos así:

$$\underbrace{2}_{1^\circ \text{ elemento}} + \underbrace{3}_{2^\circ \text{ elemento}} = \underbrace{5}_{\text{Resultado}}$$

Operador elemento de la adición

Definición:

Dados dos números naturales a y b se llama suma de " a " y " b " y se denota $(a+b)$ al número natural S tal que $a+b=S$.

Se llama "adición" a la operación que hace corresponder a ciertos pares de números naturales (a, b) su suma $(a+b)$.

Ejemplo: 1
 $8 + 5 = 13$

Ejemplo: 2
 $3 + 5 + 11 = 19$

Sumandos Suma

Esquemáticamente

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

Suma Sumandos

Ejemplo:3

$$7 + 8 + 12 = 27$$

Sumandos Suma

Al realizar la operación ADICION de dos o más sumandos se efectúa de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r} 475 + \\ 321 \\ \hline 89 \\ 885 \end{array}$$

Los sumandos se colocan uno debajo del otro, haciendo coincidir las cifras de menor orden de cada sumando en una misma columna.

Para hallar el resultado, se suman los valores de una misma columna de derecha a izquierda, colocando debajo de cada una, la cifra de menor orden del resultado obtenido y las cifras restantes (si hubiera) se suman a la siguiente columna.

Leyes Formales

1. Clausura o Cerradura: La suma de dos o más números enteros resulta otro número
 $\forall a, b, c, \in \mathbb{Z} \rightarrow a + b = C \rightarrow C \in \mathbb{Z}$
2. Asociativa: Dadas ciertas cantidades de sumandos la suma total también resulta al hacer grupos de sumandos.
 $a + b + c = a + (b+c) = (a+b) + c$
3. Conmutativa: El orden de los sumandos no altera la suma total
 $a + b = b + a$
4. Modulativa: Para todo número entero existirá su elemento neutro o módulo de la suma denotada por cero, talque se cumpla que $a+0=a$
5. Uniformidad: Si se tienen varias igualdades, estas se pueden sumar miembro a miembro resultando otra igualdad

$$\begin{array}{r} a = b \\ c = d \\ \hline a + c = b + d \end{array}$$

6. Monotonía:

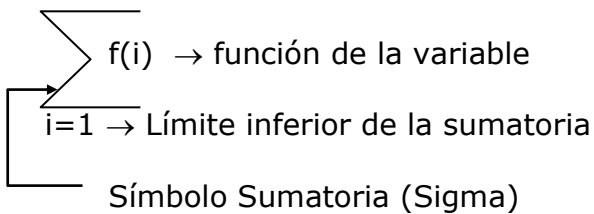
$a = b$	$a < b$	$a > b$
$c < d$	$c < d$	$c < d$
$a+c < b+d$		$a+c < b+d$

 $a+c ? b+d$

?No se puede anticipar el resultado puede ser $>$, $<$ ó $=$

Sumatoria:

$n \rightarrow$ Límite superior de la sumatoria



Propiedades.

Siendo K una constante:

$$1) \sum_{i=1}^n Kf(i) = K \sum_{i=1}^n f(i)$$

$$2) \sum_{i=1}^n K = nK$$

3) Propiedad Telescópica

$$\sum_{i=1}^n [f(i) - f(i-1)] = f(n) - f(0)$$

Ejemplo: 1

$$\sum_{i=1}^5 3i = 3 \sum_{i=1}^5 i = 3(1+2+3+4+5) = 3(15) = 45.$$

Ejemplo: 2

$$\sum_{i=1}^7 4 = 7(4) = 28$$

Ejemplo: 3

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 (4+i) &= \sum_{i=1}^4 4 + \sum_{i=1}^4 i \\ &= 4(4) + (1+2+3+4) = 16 + 10 = 26 \end{aligned}$$

Sumas Importantes:

1. Suma de los "n" primeros números naturales

$$S_n = \sum_{i=1}^n i = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Suma de los cuadrados de los "n" primeros números

$$S_{n^2} = \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Suma de los cubos de los "n" primeros números

$$S_{n^3} = \sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

4. Suma de los números pares

$$S_{2n} = \sum_{i=1}^n 2i = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

5. Suma de los números impares

$$S_{2n-1} = \sum_{i=1}^n (2i - 1) = 1 + 3 + 5 + 1 \dots + (2n - 1) = n^2$$

6. Suma de los cuadrados de los n primeros números pares.

$$S_{(2n)^2} = \sum_{i=1}^n (2i)^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2$$

$$= \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1)$$

7. Suma de los productos de 2 números consecutivos

$$\sum_{i=1}^n i(i+1) = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

8. $S = a + a^2 + a^3 \dots + a^n = a^{n+1} - \frac{a}{a-1}$

9. Suma de términos en Progresión Aritmética

$$S = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n$$

$$S = \frac{n}{2} (t_1 + t_n)$$

Donde:

n = número de términos

t₁ = primer término

t_n = último término

Ejemplo (1)

Calcular el valor de "S"

$$S = 2 + 4 + 6 + \dots + 98$$

Resolución

Se tiene que: $n = \frac{98-0}{2} = 49$

Luego $S = \frac{49}{2} (2 + 98) = 2450$

Ejemplo (2)

Hallar "A"

Si $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 10$

Resolución

Utilizando (1) Suma de los n primeros números

$$A = \frac{10(11)}{2} = 55 \text{ Rpta.}$$

Ejemplo (3)

Hallar B

Si $B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2$

Resolución: Utilizando (2)

$$B = \frac{10(10+1)[2(10)+1]}{6}$$

$$B = \frac{10(11)(21)}{6} = 385$$

Ejemplo 4

Hallar el valor de C

Si $C = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$

Resolución Utilizando (3)

$$C = \left[\frac{10.11}{2} \right]^2 = 3025$$

La Adición en otros Sistemas de Numeración

Ejemplo I

Halle la suma de: $435_7, 164_7, 416_7$

Resolución

Los sumandos son colocados en forma vertical para efectuar la operación de acuerdo al orden que ocupa sus cifras.

3	2	1	Orden
4	3	5 ⁽⁷⁾	+
1	6	4 ⁽⁷⁾	
4	1	6 ⁽⁷⁾	

Suma ¿?

Orden	Procedimiento
1	$5 + 4 + 6 = 15 = 2.7 + 1$ queda ↓ Se lleva
2	$3 + 6 + 1 + 2 = 12 = 1.7 + 5$ queda ↓ Se lleva
3	$4 + 1 + 4 + 1 = 10 = 1.7 + 3$ queda

Se lleva

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 \downarrow \\
 \begin{array}{r}
 4 \quad 3 \quad 5^{(7)} + \\
 1 \quad 6 \quad 4^{(7)} \\
 4 \quad 1 \quad 6^{(7)} \\
 \hline
 1 \quad 3 \quad 5 \quad 1^{(7)}
 \end{array}
 \end{array}$$

Ejemplos para que practiques

- 1) Efectuar $2536_8 + 6575_8 + 765_8$
- 2) Dado que $a + b + c = 9$
Calcule el valor de:
 $S = abc_5 + bca_5 + cab_5$
- 3) Sabiendo que:
 $2143_n + 3541_n = cba26_n - 6512_n$

Calcule $a + b + c + n$

Suma de Numerales Condicionados

Hallar la suma de todos los números pares de 3 cifras que empiezan en cifra impar.

Resolución

Si el número es de 3 cifras será de la forma abc donde a toma los valores 1,3,5,7,9 por ser cifras impares (según condición) como los números son pares entonces su cifra terminal es decir C tomará valores pares 0,2,4,6,8 y dado que no hay restricciones para la cifra central tomará todos los valores menores que 10.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \overline{a \quad b \quad c} \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 1 \quad 0 \quad 0 \\
 3 \quad 1 \quad 2 \\
 5 \quad 2 \quad 4 \\
 7 \quad . \quad 6 \\
 . \\
 . \\
 9 \quad 9 \quad 8
 \end{array}
 \end{array}$$

$5 \times 10 \times 5 = 250$ números

Luego para calcular la suma de estos 250 números se procede del siguiente modo.

En las unidades: Se divide la cantidad de números entre la cantidad de valores que toma la cifra de unidades y se multiplica por la suma de todos los valores que toma la cifra de sus unidades.

En forma análoga se hace para las decenas, centenas etc y luego se aplica una suma abreviada cuyo resultado final será efectivamente la suma de todos estos 250 numerales de esta forma.

$U : \frac{250}{5}(0 + 2 + 4 + 6 + 8) = 1000$

$D : \frac{250}{10}(0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 1125$

$C = \frac{250}{5}(1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 1250$

Suma total:

$$\begin{array}{r}
 1000 \\
 1125 \\
 \hline
 1250 \\
 \hline
 \text{Rpta. } \rightarrow 137250
 \end{array}$$

Ejemplo de Aplicación

Hallar la suma de todos los números capicúas de 3 cifras que se pueden formar con las cifras 0,1,3,7,8 y 9.

Resolución:

Sean los números de la forma:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \overline{a \quad b \quad a} \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 0 \quad 1 \\
 1 \quad 3 \\
 3 \quad 7 \\
 7 \quad 8 \\
 8 \\
 9 \quad 9 \\
 \hline
 6 \cdot 5
 \end{array}
 \end{array}$$

Obs.: $a \neq 0$

Por ser "a" cifra significativa

= 30 números

$U : \frac{30}{5}(1 + 3 + 7 + 8 + 9) = 168$

D: $\frac{30}{6}(0+1+3+7+8+9) = 140$

Suma : 168 → U
 Total : 140 → D
 $\frac{168}{140} \rightarrow C$

Rpta.: 18368

Problemas Tipo

1. Hallar "C" en la siguiente suma
 $a74b + 5ba2 + c7a = bba68$

- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Resolución

Ordenando en columna

$$\begin{array}{r} a74b + \\ 5ba2 \\ c7a \\ \hline bba68 \end{array}$$

De los millares llevo "1"

$b = 1$

En las unidades
 $1 + 2 + a = 8$

$a = 5$

En las decenas: $4 + 5 + 7 = 16$ llevo "1"
 En las centenas $1 + 7 + 1 + c = 15$

∴ el valor de $c = 6$ Rpta.

2. Hallar la suma de cifras de la siguiente adición

$8 + 98 + 998 + \dots + \underbrace{999\dots98}_{50 \text{ cifras}}$

- a) 47 b) 48 c) 49 d) 50 e) 51

Resolución

Como los sumando son cercanos a potencias de 10 entonces

$$\begin{array}{l} 8 = 10^1 - 2 \\ 98 = 10^2 - 2 \\ 998 = 10^3 - 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 999\dots998 = 10^{50} - 2 \end{array}$$

$S = 1111\dots1110 - 50(2)$

$S = \underbrace{1111\dots1010}_{51 \text{ cifras}}$

∴ Σ cifras de $S = 49$ Rpta.

SUSTRACCIÓN

Símbolo (-) menos

Parámetros

M : minuendo
 S : Sustraendo
 D : Diferencia

Definición.

Dados dos números a y b se llama diferencia de a y b y se denota (a-b) al número natural D, si existe $a - b = D$. Se denomina "Sustracción" a la operación que hace corresponder a ciertos pares de números naturales (a,b) su diferencia (a-b).

En general se cumple que:

1) $M - S = D$

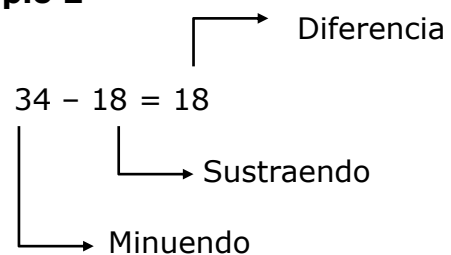
2) $M + S + D = 2M$

3) $S + D = M$

Ejemplo 1

$27 - 11 = 16$

Ejemplo 2



Observación

- Las cantidades que intervienen en una sustracción deben de ser homogéneas.
20 mesas - 6 mesas = 14 mesas
- Toda sustracción puede ser expresada como una adición
 $12 - 5 = 7 \rightarrow 5 + 7 = 12$
- $abc - nnp = xyz \rightarrow nnp + xyz = abc$
- También definen a la sustracción como la operación aritmética inversa a la adición que consiste en dada dos cantidades minuendo y sustraendo, se debe hallar una tercera que nos indique el exceso de la primera con respecto a la segunda, la cual se llamará "diferencia".

Leyes Formales

- Clausura.** En naturales es restrictiva. En enteros, la diferencia de 2 números enteros es otro número entero.
- Ley del Inverso Aditivo.** Si se tiene un número "a" existirá uno y sólo un número denominado (-a) tal que: $a + (-a) = 0$
- Uniformidad.** Dadas 2 igualdades estas se podrán restar miembro a miembro, dando como resultado otra igualdad.

$$\begin{array}{l} a = b \\ c = d \\ \hline a - c = b - d \end{array}$$

4. Monotonía

$$\begin{array}{l} a = b \\ c < d \\ \hline a - c > b - d \end{array} \qquad \begin{array}{l} a < b \\ c = d \\ \hline a - c < b - d \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a > b \\ c < d \\ \hline a - c > b - d \end{array} \qquad \begin{array}{l} a < b \\ c < d \\ \hline a - c ? b - d \end{array}$$

? (El resultado no se puede anticipar pudiendo ser >, <, =)

Escolio: Si se restan miembro a miembro desigualdades del mismo sentido, el resultado no puede anticiparse pudiendo ser una desigualdad o una igualdad.

Alteraciones del Minuendo y el Sustraendo

- Si el minuendo aumenta o disminuye una determinada cantidad y el sustraendo no varía, la diferencia queda aumentada o disminuida en la misma cantidad.
- Si el sustraendo aumenta o disminuye una cantidad cualquiera y el minuendo no varía, la diferencia disminuye en el primer caso y aumenta en el segundo caso dicha cantidad.
- Si el minuendo y el sustraendo aumentan o disminuyen a la vez una misma cantidad, la diferencia no varía.
- Si al minuendo se le agrega otra cantidad la diferencia disminuye en la suma de dichas cantidades.

Propiedades de la Sustracción

- Si $N = \overline{ab}$ se cumple que

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 9(a - b)$$

- Sea $N = \overline{abc}$, donde $a > c$
Se cumple:

$$\begin{array}{l} \overline{abc} - \overline{cba} = \overline{mnp} \\ \hline 99(a - c) = \overline{mnp} \end{array}$$

donde:

$$\begin{array}{l} m + p = 9 \\ n = 9 \\ a - c = m + 1 \end{array}$$

Ejm:

$\overline{341} -$	$\overline{672} -$	$\overline{993} -$
$\underline{143}$	$\underline{276}$	$\underline{399}$
198	396	594

3) Sea $N = \overline{abcd}$ donde $a > d$

a) Si $b \neq c : \overline{abcd} - \overline{dcba} = \overline{mnpq}$
 $\rightarrow m + n + p + q = 18$

b) Si $b = c : \overline{abbd} - \overline{dbba} = \overline{mnpq}$
 $\rightarrow m + q = 9$
 $n = p = 9$

Así:

$$\begin{array}{r} 4781 - 7552 \\ 1847 \quad 2557 \\ \hline 2907 \quad 4995 \end{array}$$

Problemas de Aplicación

1. Sabiendo que:
 $\overline{abc2} - \overline{2cba} = 5175$
 además $b + c = 10$
 Calcular el minuendo

Resolución

Incógnita: $\overline{2cba}$

Toda sustracción se convierte en adición

$$\overline{abc2} - \overline{2cba} + 5175$$

$$\begin{array}{r} \overline{} \\ 2cba + \\ 5175 \\ \hline abc2 \end{array}$$

De las unidades: $a + 5 = \overline{}2$

Se deduce $a = 7$

Se lleva 1

En las decenas: $1 + b + 7 = \overline{1}c = 10 + c$

$$8 + b = 10 + c$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} b - c = 2 \\ \text{Dato: } b + c = 10 \end{array} \right\} \therefore \begin{array}{l} b = 6 \\ c = 4 \end{array}$$

Luego minuendo: $\overline{2cba} = 2467$ Rpta.

La sustracción en otros sistemas de numeración

Ejm. 1 Halle la diferencia de los siguientes números $432_{(5)}$ y $143_{(5)}$

Resolución

Se disponen los términos de manera vertical para trabajar de acuerdo al orden.

	3^0	2^0	1^0
			← orden
Minuendo →	4	3	$2_{(5)}$
Sustraendo →	1	4	$3_{(5)}$
Diferencia →	¿	?

Orden	Procedimiento
1	Como a "2" no se le puede disminuir "3" lo que se hace es regresar del orden 2 una vez a la base (es decir 5) Luego $5 + 2 - 3 = 4$ queda
2	Como se ha regresado una vez la base, quiere decir que en este orden se tiene ahora $3-1 = 2$ pero a 2 no le podemos disminuir en 4, luego del orden 3 regresamos una vez la base (es decir 5) $5 + 2 - 4 = 3$ queda
3	Aquí se tenía 4 veces la base, pero regresamos al orden anterior luego aquí quedo $4-1 = 3$, entonces $3 - 1 = 2$ queda

Al final se tiene que:

$$\begin{array}{r} 4 \quad 3 \quad 2_{(5)} - \\ 1 \quad 4 \quad 3_{(5)} \\ \hline 2 \quad 3 \quad 4_{(5)} \end{array}$$

Practicando:

Realizar las siguientes sustracciones

$$\begin{array}{r} 643_8 - 532_6 - 746_9 - \\ 346_8 - 235_6 - 647_9 - \\ \hline \\ \end{array}$$

Se llega a la siguiente conclusión:

$$\begin{array}{r} \overline{abc}_{(k)} - \\ \overline{cba}_{(k)} \\ \hline \overline{xyz}_{(k)} \end{array} \Rightarrow \boxed{x + z = y = k - 1}$$

Aplicación:

- 1) Si $\overline{abc}_8 = 2cba_8$
Calcule $a \times b \times c$
- 2) Si $\overline{abc}_7 - \overline{cba}_7 = 4mn_7$
Hallar $a - c + m + n$
- 3) Efectuar las siguientes sustracciones

$5413 -$	$7241 -$	$6113 -$
<u>3145</u>	<u>1427</u>	<u>3116</u>
$6524_{(7)} -$	$4132_{(5)} -$	$1786_{(9)} -$
<u>4526_{(7)}</u>	<u>2314_{(5)}</u>	<u>586_{(9)}</u>

Complemento Aritmético (C.A.)

Se denomina complemento aritmético de un número natural a la cantidad que le falta a dicho número para ser igual a una unidad del orden inmediato superior, a su cifra de mayor orden.

Ejemplo: Hallar el C.A. de 24
 $CA(24) = 10^2 - 24 = 76$

Ejemplo: Hallar el C.A. de 327
 $CA(327) = 1000 - 327 = 673$

En general:

$$C.A. (N) = 10^k - N$$

Siendo k el número de cifras que tiene N.

Método Práctico para calcular el C.A. de los números

A partir del menor orden se observa la primera cifra significativa, la cual va a

disminuir a la base y las demás cifras disminuyen a la base menos 1.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 9 & 9 & 10 \\
 | & | & | \\
 CA & (7 & 4 & 8) = 252
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 9 & 9 & 9 & 10 \\
 | & | & | & | \\
 CA & (5 & 1 & 3 & 6) = 4864
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 9 & 9 & 10 & \\
 | & | & | & \\
 CA & (7 & 0 & 4 & \underline{0}) = 2960
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 8 & 8 & 9 \\
 | & | & | \\
 CA & (2 & 1 & 8_9) = 671_{(9)}
 \end{array}$$

Excedencia de un número

Se denomina excedencia de un número a la diferencia entre el número dado y una unidad de su orden más elevado.

Ejemplo:
 Excedencia de 18 = $18 - 10 = 8$

Excedencia de 326 = $326 - 100 = 226$

Excedencia de 4753 = $4753 - 1000 = 3753$

En general:

$$Ex(N) = N - 10^{k-1}$$

Siendo k el número de cifras que tiene N.

CUATRO OPERACIONES MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

OBJETIVOS:

- Realizar la multiplicación y división en diferentes sistemas de numeración.
- Deducir las propiedades de la división inexacta.
- Aplicar la multiplicación y división en la solución de problemas concretos.

MULTIPLICACIÓN

ORIGEN: En una operación de adición, en donde todos los sumandos son iguales, tal como la siguiente,
 $P = M + M + M + M + \dots + M$ (m veces)

Se puede realizar una operación abreviada:

$$P = M \times m$$

a esta operación se denomina multiplicación, donde:
 M \Rightarrow multiplicando
 m \Rightarrow multiplicador x \Rightarrow Símbolo (por)
 P \Rightarrow Producto
 M y m son denominados "factores"

DEFINICIÓN

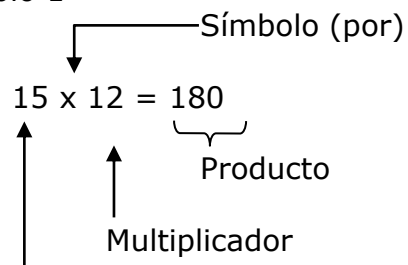
Es decir la multiplicación es una operación directa cuyo origen proviene de la adición y consiste en dadas 2 cantidades, multiplicando y multiplicador se debe hallar una tercera cantidad llamada "producto" que contenga al multiplicando las mismas veces que el multiplicador contenga a la unidad.

Se cumple:

$$\frac{P}{M} = \frac{m}{1}$$

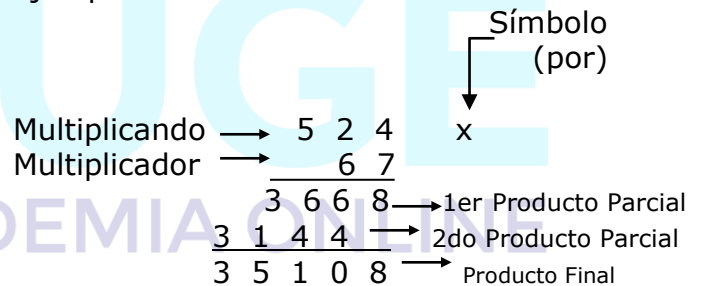
En el campo de los naturales, se denomina "multiplicación" a la operación que hace corresponder a ciertos pares de números naturales (a,b) su producto a . b.

Ejemplo 1



Multiplicando

Ejemplo 2



Leyes Formales

1. **Clausura.** El producto de 2 números enteros es otro número entero.
2. **Conmutativa.** El orden de los factores no altera el producto.
 $a \times b = b \times a$
3. **Asociativa:** El producto de varios números no varía si se reemplaza dos o más factores por su producto parcial.
 $a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
4. **Distributiva.** El producto de un número por una suma o resta es igual a la suma o resta de los productos del número dado por cada uno de los términos

Si $P = a(b + c - d)$
 $\therefore P = a \times b + a \times c - a \times d$

5. **Uniformidad.** Multiplicando miembro a miembro varias igualdades resulta otra igualdad.

Si: $a = b$
 $c = d$

 $a \times c = b \times d$

6. **Modulativa.** Existe uno y sólo un elemento que se denota por 1 (denominado elemento neutro multiplicativo o módulo de la multiplicación) tal que siempre se cumple:

$a \times 1 = 1 \times a = a$

7. **Monotonía:**
 a) Multiplicando miembro a miembro desigualdades (relación de orden), todas del mismo sentido, con términos positivos y también multiplicando igualdades, resulta una igualdad del mismo sentido que las dadas.

*) Si: $a > b$ $c > d$ $e = f$ $a.c.e > b.d.f.$	*) Si: $a < b$ $c = d$ $e < f$ $a.c.e < b.d.f.$
--	--

- b) Multiplicando miembro a miembro varias desigualdades del mismo sentido con términos positivos resulta una desigualdad del mismo sentido que las dadas

*) Si $a < b$ $c < d$ $a \times c < b \times d$	*) Si: $a > b$ $c > d$ $a \cdot c > b \cdot d$
---	--

Escolio. Si se multiplica miembro a miembro desigualdades de sentido contrario, el resultado no puede anticiparse, pudiendo ser una desigualdad o una igualdad.

Si $a < b$
 $c > d$

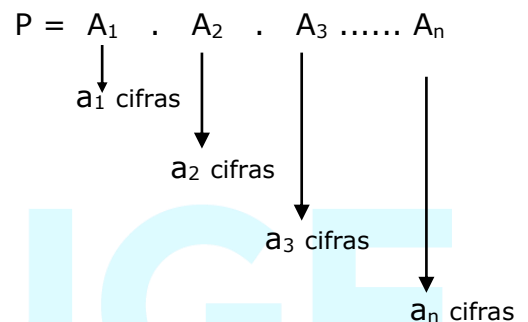
Puede ocurrir que:

$$\left. \begin{array}{l} a \times c < b \times d \\ a \times c = b \times d \\ a \times c > b \times d \end{array} \right\} a \times c \begin{array}{l} < \\ = \\ > \end{array} b \times d$$

Determinación de la cantidad de cifras de un producto

La cantidad de cifras de un producto de "n" factores será máxima cuando sea igual a la suma de la cantidades de cifras de cada factor y como mínimo dicha suma disminuida en (n-1)

Sea:

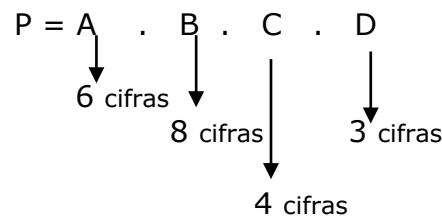


Cuántas cifras como máximo y como mínimo puede tener P.

Máximo: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S$

Mínimo: $S - (n-1)$

Ejemplo (1)



donde $n = 4$ (Nº factores)

Máximo : $6 + 8 + 4 + 3 = 21$

Mínimo = $21 - (4-1) = 18$

Ejemplo (2)

Dos números enteros escritos en el sistema decimal tienen 5 y 8 cifras respectivamente ¿Cuántas cifras tendrá el producto del cuadrado del primero por el cubo del segundo?

Resolución

Sea $A \rightarrow$ tiene 5 cifras
 $B \rightarrow$ tiene 8 cifras
 $A^2 \cdot B^3 = A \cdot A \cdot B \cdot B \cdot B$ Producto de 5 factores

Entonces:

Nº de cifras $\begin{cases} \text{Máximo: } 5+5+8+8+8=34 \\ \text{de } A^2B^3 \text{ } \end{cases}$
 Mínimo: $34-(5-1) = 30$

Conclusión

Cuando se multipliquen potencias enteras de números enteros se procederá del modo siguiente:

Para determinar el máximo número de cifras de su producto se suma todos los productos parciales de los exponentes por sus respectivas cantidades de cifras.

En el ejemplo dado:

Máximo = $2(5) + 3(8) = 34$

Para determinar la menor cantidad de cifras que acepta el producto, al máximo número de cifras se le sustraerá la suma de los exponentes de las potencias aumentándose la unidad.

En el ejm. $\text{Min} = 34 - (2 + 3) + 1 = 30$

Ejemplo (3)

Se dispone de 4 números enteros, los cuales se representan como A, B, C, D en el sistema decimal admitiendo 4,6,8 y 5 cifras. ¿Cuántas cifras tendrá E?

Siendo $E = [A^4 \cdot B^2 \cdot C^1 \cdot D^3]^2$

Resolución

Sabemos que:

$A \rightarrow$ 4 cifras $C \rightarrow$ 8 cifras
 $B \rightarrow$ 6 cifras $D \rightarrow$ 5 cifras

$E = A^8 \cdot B^4 \cdot C^2 \cdot D^6$

Entonces Nº de Cifras de E:

Máximo = $8.4 + 4.6 + 2.8 + 6.5 = 102$
 Mínimo = $102 - (8 + 4 + 2 + 6) + 1 = 83$

MULTIPLICACION EN OTROS SISTEMAS DE NUMERACION

Ejm.: Efectuar $243_7 \cdot 36_7$

Procedimiento. Los términos son colocados en la forma siguiente, para efectuar la operación de acuerdo al orden que ocupan sus cifras.

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 1 \quad \leftarrow \text{orden} \\ 2 \ 4 \ 3_{(7)} \times \quad \text{multiplicando} \\ \hline 3 \ 6_{(7)} \quad \text{multiplicador} \\ \text{¿.....?} \end{array}$$

* Para la cifra de orden 1 del multiplicador:

$6 \times 3 = 18 = \textcircled{2} \times 7 + \textcircled{4} \leftarrow \text{queda}$
 Se lleva

$6 \times 4 + 2 = 26 = \textcircled{3} \times 7 + \textcircled{5} \leftarrow \text{queda}$
 Se lleva

$6 \times 2 + 3 = 15 = \textcircled{2} \times 7 + \textcircled{1} \leftarrow \text{queda}$
 Se lleva

* Para la cifra de orden 2 del multiplicador:

$3 \times 3 = 9 = \textcircled{1} \times 7 + \textcircled{2} \leftarrow \text{queda}$
 Se lleva

$3 \times 4 + 1 = 13 = \textcircled{1} \times 7 + \textcircled{6} \leftarrow \text{queda}$
 Se lleva

$3 \times 2 + 1 = 7 = \textcircled{1} \times 7 + \textcircled{0} \leftarrow \text{queda}$
 Se lleva

Al final se tiene que:

Multiplicando	2	4	3 ₍₇₎	x
Multiplicador	3 6 ₍₇₎			
Productos	2	1	5	4 ₍₇₎
Parciales	1	0	6	2 ₍₇₎
Producto				
Final	1	3	1	0 4 ₍₇₎

Aplicación 1

Al multiplicar \overline{abc} por 137 se observó que la suma de los productos parciales fue 3157. Calcule $a + b + c$

Resolución

OBS: P.P. (Producto Parcial)

\overline{abc}	x
$\underline{137}$	
7 x \overline{abc}	→ 1º P.P.
3 x \overline{abc}	→ 2º P.P.
1 x \overline{abc}	→ 3º P.P.

Condición en el problema

$$7\overline{abc} + 3\overline{abc} + 1\overline{abc} = 3157$$

$$11\overline{abc} = 3157$$

$$\overline{abc} = 287$$

$$\therefore \begin{matrix} a = 2 \\ b = 8 \\ c = 7 \end{matrix}$$

$a + b + c = 17$ Rpta

Aplicación 2

Disminuyendo en 3 a los términos de la multiplicación, el producto disminuye en 231. Halle los factores si la diferencia de ellos es 36.

Resolución

Sean M y N los términos de la multiplicación

Sabemos que $M \times N = P$

Condición del problema

$$(M - 3)(N - 3) = P - 231$$

$$\downarrow$$

$$M.N - 3M - 3N + 9 = M.N - 231$$

$$231 + 9 = 3M + 3N$$

$$240 = 3(M + N)$$

$$80 = M + N \dots\dots (1)$$

DATO: $36 = M - N \dots\dots (2)$

Resolviendo (1) y (2)

$$M = \frac{80+36}{2} \Rightarrow M = 58$$

$$N = \frac{80-36}{2} \Rightarrow N = 22$$

∴ Los factores son 58 y 22 Rpta.

Aplicación 3

Si $\overline{abc} \times 237 = \overline{dd973}$

Calcule la suma de los productos parciales.
Rpta. 3948

Aplicación 4

Calcule $(a + b + c + d)$ si:

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{ddd}$$

Rpta. 21

Aplicación 5

Efectuar $4132_{(5)} \cdot 234_{(5)}$

Rpta. 2144043_5

Aplicación 6

¿Cuál es la suma de cifras de:

$$\overline{abcd} \cdot \overline{xmyn}, \text{ sabiendo que:}$$

$$\overline{abcd} \cdot \overline{xoy} = 1782312$$

$$\overline{abcd} \cdot \overline{mon} = 2353344$$

Resolución

Dando forma al numeral \overline{xmyn} para aprovechar los datos.

$$\overline{xmyn} = \overline{xoyo} + \overline{mon} = 10 \cdot \overline{xoy} + \overline{mon}$$

Luego:

$$\overline{abcd} \cdot \overline{xmyn} = \overline{abcd} \cdot [10 \cdot \overline{xoy} + \overline{mon}]$$

efectuando :

$$\overline{abcd} \cdot \overline{xmyn} = 10 \overline{abcd} \cdot \overline{xoy} + \overline{abcd} \cdot \overline{mon}$$

al reemplazar los datos se tendrá que:

$$\overline{abcd} \cdot \overline{xmyn} = 10(1782312) + 2353344$$

Finalmente: $\overline{abcd} \cdot \overline{xmyn} = 20176464$

Suma de cifras:

$$2+0+1+7+6+4+6+4 = 30 \text{ Rpta.}$$

Aplicación 7

Si se cumple que:

$$\overline{abcde} \cdot 99 = \dots 47253$$

Calcular $a+b+c+d+e$

Resolución

Transformamos la multiplicación de $\overline{abcde} \cdot 99$ en una sustracción

$$\overline{abcde} \cdot 99 = \overline{abcde} (100 - 1)$$

$$\overline{abcde} \cdot 99 = \overline{abcde00} - \overline{abcde}$$

Luego: $\overline{abcde00} -$

$$\begin{array}{r} \overline{abcde} \\ \underline{} \\ \dots 47253 \end{array}$$

Al tratar de restar se deduce que:

$$a = 9, b = 7, c = 4, d = 4, e = 7$$

Con lo cual $a + b + c + d + e = 31$

Rpta. 31

FORMAS CURIOSAS DE MULTIPLICAR

MULTIPLICACIÓN EGIPCIA

El método de multiplicación egipcia sobrevivió durante siglos esparciéndose en muchas civilizaciones. En las escuelas de la Antigua Grecia se lo enseñaba con el nombre de "Cálculo Egipcio". En la Edad Media se enseñaban sus técnicas bajo el nombre de "DUPLATIO" para la duplicación y de "MEDIATIO" para la división en mitades. La multiplicación era considerada una operación muy difícil y hasta el siglo XVI sólo se enseñaba en las universidades.

	o	1	12
	o o	2	24
	o o	4 ✓	48
	o o	8 ✓	96
	o o	12 ✓	144

+ 144

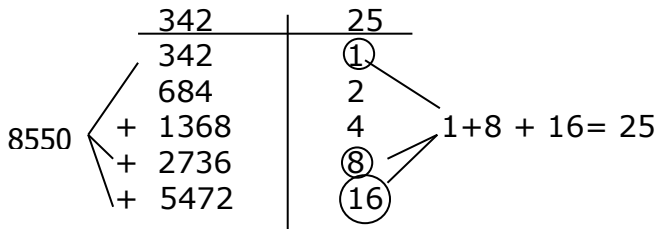
$$12 \times 12 = 144$$

He aquí un ejemplo tomado del papiro Rhind, de como un escriba egipcio hubiera multiplicado 12×12 . Se empieza con 12. Después se duplica para que de 24, que a su vez es duplicado para dar 48 y otra vez duplicado para dar 96. Se dibujan tildes junto al 4 y al 8, para indicar que suman 12. Luego se suman sus cifras correspondientes, lo que nos da la respuesta 144.

El Método Egipcio de Multiplicación eliminaba la necesidad de memorizar las tablas, ya que se basaba fundamentalmente en la adición.

* Los Romanos también utilizaron el método de duplicar y sumar.

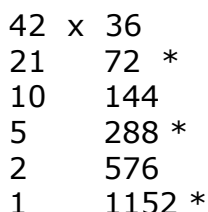
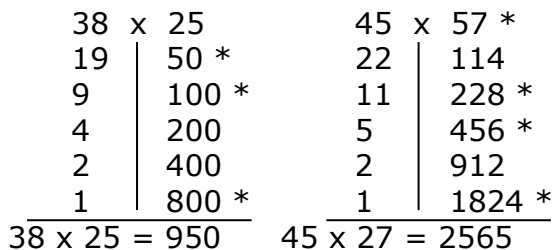
Ej. $342 \times 25 = 8550$



MULTIPLICACIÓN COSACA O "A LA RUSA"

El conocimiento de la tabla de multiplicación no es muy extendida en la Estepa, se dice que los Mujic los más instruidos saben apenas más que una columna, la de los múltiplos de 2. Esto les basta sin embargo para efectuar el producto de dos números cualesquiera. Ellos emplean para esto un proceso muy curioso: ellos toman la mitad de uno de los factores con la unidad tomada por defecto y escriben al lado el doble del otro factor. Si esta mitad es un número impar, ellos marcan de un signo * el factor doblado. Continúan así, dividiendo por 2 los números de una columna, y doblando aquellos de la otra, la operación termina cuando se llega a 1 en la primera columna.

La suma de los números inscritos en la columna de los dobles, y que, son marcados del signo * es igual al producto buscado veamos tres ejemplos de este cálculo.



$42 \times 36 = 1512$

Será suficiente escribir las operaciones para comprender el principio del método:

$38 \times 25 = 2 \times 19 \times 25 = 19 \times 50$
 $= (2 \times 9 + 1) 50$
 $= 9 \times 100 + 50*$
 $9 \times 100 = (2 \times 4 + 1) 100$
 $= 4 \times 200 + 100*$
 $4 \times 200 = 800 *$

MULTIPLICACIÓN DE INAUDI

El famoso calculista Inaudi se sirve para la multiplicación de un método particular.

Este consiste del modo siguiente.

Multipliquemos 532×468

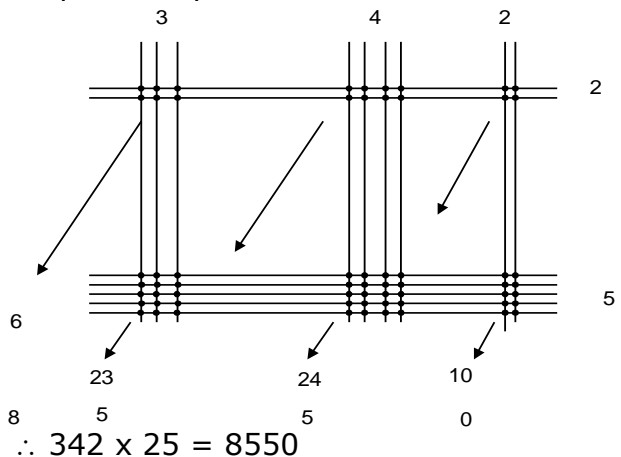
$500 \times 400 = 200000$
 $500 \times 68 = 34000$
 $468 \times 30 = 14040$
 $468 \times 2 = \underline{936}$
TOTAL = 248976

Para probar que el método seguido es exacto, bastará observar que:

$532 \times 468 = (500 + 32) \times 468$
 $532 \times 468 = 500 \times 468 + 32 \times 468$
 $532 \times 468 = 500 \times 400 + 500 \times 68 + 30 \times 468 + 2 \times 468$

MULTIPLICACIÓN CHINA

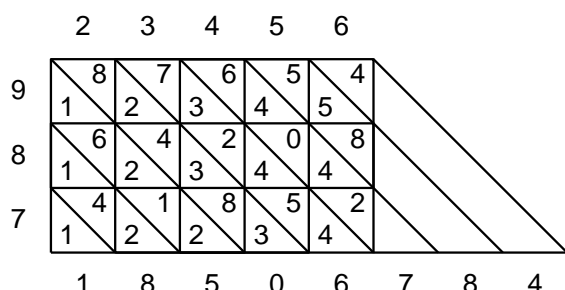
Los chinos multiplicaban con varillas. Se cuentan los puntos de intersección en una misma diagonal empezando por los de abajo a la derecha. Después, se suman las unidades, las decenas,, empezando por la derecha.



Multiplicación Musulmana (Arabe)

Los árabes utilizaban una cuadrícula con diagonales

Ejemplo: Multiplicar 23456 x 789



El multiplicando tiene 5 cifras y el multiplicador 3, formemos como en la figura un rectángulo conteniendo 5 x 3= 15 casilleros iguales, cada una de estas casillas siendo dividida en dos triángulos por una diagonal. Escribamos de izquierda a derecha cada cifra del multiplicando sobre cada una de las casillas de la línea horizontal superior y de abajo hacia arriba, cada una de las cifras del multiplicador en frente de cada una de las casillas de la línea vertical izquierda.

Multipliquemos ahora cada cifra del multiplicando por cada cifra del multiplicador y escribamos el resultado en la casilla colocada en la intersección de la hilera vertical y de la hilera horizontal relativas a las dos cifras consideradas y de tal modo que la cifra de las decenas del producto se halle en el triángulo inferior y la de las unidades en el triángulo superior.

Se observará que con este procedimiento es indiferente comenzar la multiplicación por la derecha o por la izquierda.

A continuación para tener el producto buscado, se suma a partir de la derecha las cifras comprendidas entre dos transversales consecutivas, cifras que representan unidades del mismo orden. Así se pone primeramente 4 . 5 más 5

más 8 dan 18, se pone 8 y se retiene 1 etc. Se halla así que el producto es 18506784.

DIVISIÓN

DEFINICIÓN. Dado los números naturales D y d ≠ 0 se llama cociente de D y d. Se denota $\frac{D}{d}$, si al número natural q, si existe tal que D = dq

Se llama "división" a la operación que hace corresponder a ciertos pares (D,d) de números naturales su cociente $\frac{D}{d}$.

En otras palabras la división es una operación aritmética inversa a la multiplicación que tiene por objeto en dadas 2 cantidades llamadas dividendo y divisor, hallar una tercera cantidad llamada cociente que ponga en manifiesto las veces que el dividendo contiene al divisor.

PARÁMETROS

- Dividendo (D)
- Divisor (d)
- Cociente por defecto (q)
- Cociente por exceso (q')
- Residuo por defecto (r)
- Residuo por exceso (r')

CLASIFICACIÓN

- a) División Exacta. Es cuando no existe presencia de resto

Esquemáticamente

$$D \begin{array}{l} \overline{)d} \\ - q \end{array} \Rightarrow \boxed{D = dq}$$

- b) División Inexacta. Es cuando existe presencia de resto y a su vez se sub clasifican en:

1) Por defecto

$$\begin{array}{r} D \overline{)d} \\ \underline{q} \\ +r \end{array}$$

$$D = dq + r$$

Ejm. Dividir 84 entre 9.

$$\begin{array}{r} 84 \overline{)9} \\ \underline{9} \\ 3 \end{array} \quad \therefore 84 = 9 \cdot 9 + 3$$

2) Por exceso

$$\begin{array}{r} D \overline{)d} \\ -r' \quad \underline{q'} = q + 1 \end{array}$$

$$D = dq' - r'$$

Ejm. Dividir 59 entre 7

$$\begin{array}{r} 59 \overline{)7} \\ -4 \quad \underline{8 + 1} \quad \times \\ 59 = 7(8 + 1) - 4 \end{array}$$

Ejm. Dividir 85 entre 4

$$\begin{array}{r} 85 \overline{)4} \\ \underline{22} \quad \times \\ -3 \\ 85 = 4 \cdot 22 - 3 \end{array}$$

Propiedades

- 1) $0 < r < d$
- 2) $r + r' = d$
- 3) $q' = q + 1$
- 4) $r_{\min} = 1$
- 5) $r_{\max} = d - 1$

Leyes

1) **Ley de Uniformidad.** Si se dividen miembro a miembro dos igualdades (con la segunda igualdad diferente de cero), el resultado es otra igualdad

Si $a = b$
 $\frac{c = d}{a : c = b : d}$

2) **Ley del Inverso Multiplicativo.** Para todo número N diferente de cero, existe uno y sólo un elemento denominado inverso multiplicativo denotado por N^{-1} ó $\frac{1}{N}$ tal que:

$$N \times N^{-1} = 1$$

3) **Ley Distributiva.** El cociente de una suma o resta entre un número es igual a la suma o resta de los cocientes de cada uno de los términos entre el número dado

Si: $q = (a + b - c) : d$

$$\therefore q = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d}$$

A) Ley de Monotonía

- | | | | |
|----|---|----|--|
| a) | Si : $a < b$
$\frac{c = d}{a : c < b : d}$ | Si | $a > b$
$\frac{c = d}{a : c > b : d}$ |
| | Si : $a = b$
$\frac{c < d}{a : c > b : d}$ | Si | $a = b$
$\frac{c > d}{a : c < b : d}$ |
| a) | Si : $a < b$
$\frac{c > d}{a : c < b : d}$ | Si | $a > b$
$\frac{c < d}{a : c > b : d}$ |

ESCOLIO

Si se dividen miembro a miembro desigualdades del mismo sentido, el resultado no puede anticiparse, pudiendo ser una desigualdad o una igualdad.

Si : $a < b$
 $\frac{c < d}{a : c ? b : d}$

$$? \left\{ \begin{array}{l} a : c < b : d \\ a : c = b : d \\ a : c > b : d \end{array} \right.$$

ALTERACIONES EN LA DIVISIÓN

I. ALTERACIÓN DEL COCIENTE

1. Si el dividendo de una división exacta se le multiplica (o divide) por un mismo valor entero el cociente queda multiplicado (o dividido) por el mismo valor entero

2. Si al divisor de una división inexacta se le multiplica (o divide) por un valor entero, el cociente queda dividido (o multiplicado) por el mismo valor entero

3. Si al dividendo y al divisor de una división exacta se les multiplica (o divide) por un mismo valor entero, el cociente no varía (INALTERABILIDAD DEL COCIENTE)

II. ALTERACIÓN EN LA DIVISIÓN INEXACTA

a) Por Adición de Unidades al Dividendo

Al sumarle un cierto valor al dividendo este mismo valor se suma al residuo. Si el nuevo residuo no es menor al divisor, se divide entre él, el cociente que se obtenga, será el número de unidades que aumente el cociente de la división inicial y el residuo que deja será el nuevo residuo de la división.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 4735 \overline{)21} \\
 \underline{10} \\
 10
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4735 + 10 \overline{)21} \\
 \underline{10} \\
 10 + 10
 \end{array}
 \leftarrow \text{Cociente no varia}$$

División inicial Residuo (20) < Divisor

$$\begin{array}{r}
 4735 + 35 \overline{)21} \\
 \underline{10 + 35 = 45} \\
 10 + 35 = 45
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 45 \overline{)21} \\
 \underline{2} \\
 3
 \end{array}
 \leftarrow \text{Cociente aumenta en 2}$$

Residuo > divisor (45) (21) ↑ Nuevo Residuo 3

b) Por Multiplicación de Unidades al Dividendo

- b1. **Alterando el Divisor**, si se multiplica al dividendo y al divisor por un mismo valor, el cociente no variará y el residuo queda multiplicado con el mismo valor.

Inicialmente $D = d \times q + R$ ($R < d$)

Se multiplica por "n"

$$n \times D = n \times d \times q + n \times R$$

Nuevo Dividendo
Nuevo Divisor
Nuevo Residuo

- b2. **Alterando el cociente**. Si se multiplica al dividendo y al cociente por un mismo valor, el residuo queda multiplicado por dicho valor.

Pero se señala las mismas observaciones que en el caso por adición.

Inicialmente: $D = d \times q + R$
 Donde $R < d$

Se multiplica por "n"

$$n \times D = d \times n \times q + n \times R$$

Nuevo Dividendo
Nuevo Cociente
Nuevo Residuo

Donde:

$n \times R < d$: la división queda como se indica.

$n \times R \geq d$: Se dividen los valores señalados el cociente obtenido será lo que aumenta el cociente anterior y el residuo que deja será el residuo real.

$$\begin{array}{r}
 43 \overline{)7} \\
 \underline{6} \\
 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 43 \times 3 \overline{)7} \\
 \underline{6 \times 3} \\
 1 \times 3
 \end{array}$$

División Inicial Residuo < divisor
(3) (7)

$$\begin{array}{r} 43 \times 8 \overline{) 7} \\ 1 \times 8 \overline{) 6 \times 8} \end{array} \Rightarrow 8 \overline{) 7} \begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array}$$

Residuo > divisor
(8) (7)

- El cociente 6 x 8 aumenta 1
 - El residuo real será 1
- $$D = dq + 5 \dots\dots (1) \quad d > 5$$

Multiplicando por 4
 $4D = d(4q) + 20$

Pero $\left. \begin{array}{l} 20 \overline{) d} \\ 2 \overline{) q} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 20 = dq' + 2 \\ 18 = dq' \end{array}$
nuevo residuo

∴ d esta contenido en $18:d = 18,9,6$ no más ($d > 5$)

3) Hallar la suma de todos los números enteros que al ser divididos entre 25 originan un cociente que es el triple del residuo

Resolución

Sean el esquema $\begin{array}{l} D \overline{) d = 25} \\ R < 25 \quad R \overline{) q = 3R} \end{array}$

Se conoce: $D = d \times q + R$
 $D = 25 (3R) + R = 76R$
Pero el residuo es un valor no limitado.
En una división inexacta $0 < R < 25$

$\Rightarrow R = 1,2,3,\dots, 24$
Como $D = 76R$, la suma de sus posibles valores será:
Suma de valores de $D =$
 $76 (1 + 2 + 3 + \dots + 24) = \mathbf{22800}$

CANTIDAD DE CIFRAS DE UN COCIENTE

La cantidad de cifras del cociente de dos números, puede ser como mínimo igual a la diferencia entre las cantidades de cifras del dividendo y divisor y como máximo la diferencia aumentada en una unidad.

$$Q = \frac{A}{B} \quad \begin{array}{l} \rightarrow a \text{ cifras} \\ \rightarrow b \text{ cifras} \end{array}$$

¿Cuántas cifras como mínimo y como máximo puede tener "q"?

máximo : $a - b + 1$
mínimo : $a - b$

CASO ESPECIAL

CUANDO EL NUMERADOR Y DENOMINADOR TIENEN VARIOS FACTORES

Primero se calcula la cantidad de cifras como máximo y como mínimo, tanto del numerador como denominador, mediante la regla del producto. Luego para hallar el máximo del cociente se compara el máximo del numerador con el mínimo del denominador, análogamente para hallar el mínimo del cociente se compara el mínimo del numerador con el máximo del denominador, ambos mediante la determinación de la cantidad de un cociente.

Ejm. A, B y C tienen 12, 9, y 5 cifras respectivamente. ¿Cuántas cifras tiene E?

$$E = \frac{A^2 \cdot B^3}{C^4}$$

$$A^2 B^3 \left\{ \begin{array}{l} \text{Máx} : 2(12) + 3(9) = 51 \\ \text{Mín} : 51 - (5 - 1) = 47 \end{array} \right.$$

$$C^4 \quad \begin{array}{l} \text{Máx} : 4(5) = 20 \\ \text{Mín} : 20 - (4 - 1) = 17 \end{array}$$

$$E = \left\{ \begin{array}{l} \text{Máx} : 51 - 17 + 1 = 35 \\ \text{Mín} : 47 - 20 = 27 \end{array} \right.$$

DIVISIBILIDAD I

DIVISIBILIDAD

I. RESUMEN TEÓRICO

1.1 Número Divisibles

Si A representa un número entero y B un número natural diferente de cero:

"A es divisible por B" $\Rightarrow A:B$
 $\Leftrightarrow A: B$ es exacta con cociente entero.

a B se denominará Divisor de A

Ejemplo: $91:13 = 7$
 $\Rightarrow 91$ es divisible por $13 \Rightarrow$
 $91:13$
 y 13 es divisor de $91!$

1.2 Múltiplos de un Número Natural

Múltiplos de $n = n.K$ ($K \in \mathbb{Z}$)

SIMBOLOGÍA

∇ Notación de Leibnitz

Múltiplos de $n = n = m.n = n.K.$
 $\mathbb{Z} = \{ 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots \}$

Ejemplo:

$\dot{7} = \{ 0; \pm 7; \pm 14; \pm 21; \dots \}$

1.3 Principios de Divisibilidad

¡Si A y B son divisibles por n!

Se cumplen las siguientes propiedades

(1) "A + B es divisible por n"

Conclusión:

$$\overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$$

(2) "A - B es divisible por n"

Conclusión:

$$\overset{\circ}{n} - \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$$

(3) "A.K es divisible por n"

$$\overset{\circ}{n} . K = \overset{\circ}{n} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

(4) "A^m es divisible por n"

Conclusión:

$$(\overset{\circ}{n})^m = \overset{\circ}{n} \quad (m \in \mathbb{Z}^+)$$

(5) "Todo número es divisible por los factores naturales que contiene"

Ejemplo:

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

105 es divisible por: 1: 3: 5: 7 y las combinaciones de estos factores:

15; 21; 35 y 105

(6) "Si $A \cdot B = \overset{\circ}{n}$, además: A y n tienen como único factor común la unidad

Entonces: $B = \overset{\circ}{n}$

* (Principio de Arquímedes)

Ejemplo:

$$7 \cdot B = \overset{\circ}{15} \Rightarrow B = \overset{\circ}{15}$$

$$2A + 4B = \overset{\circ}{9} \Rightarrow A + 2B = \overset{\circ}{9}$$

1.4 Expresar un Número como Múltiplo de otro Número.

Ejemplo: Expresar 400 como múltiplo de 23

$$400 \underset{17}{\overline{)23}} \Rightarrow 400 = \overset{\circ}{23} + 9$$

(9) 17

$$400 \overset{\circ}{\underset{23}{|}} \Rightarrow 400 = \overset{\circ}{23} \cdot 14 - (14) 18$$

1.5 Aplicaciones del Binomio de Newton

Sean A y n números no divisibles.

$$\Rightarrow A = \overset{\circ}{n} + r$$

$$A = \overset{\circ}{n} + r'$$

$$r + r' = n$$

r : Residuo por defecto de A:n
 r' : Residuo por exceso de A:n

Se demuestra que:

$$(\overset{\circ}{n} + r)^m = \overset{\circ}{n} + r^m, \quad m \in \mathbb{Z}^+$$

$$(\overset{\circ}{n} - r')^m = \overset{\circ}{n} + (r')^m, \quad m = \# \text{ par}$$

$$(\overset{\circ}{n} - r')^m = \overset{\circ}{n} - (r')^m, \quad m = \# \text{ impar}$$

1.6 Restos Potenciales

Se llaman restos potenciales de un número "a" respecto a un módulo "m", a los restos que se obtienen dividiendo la serie natural de las potencias de "a" entre "m". Estos es:

$$\begin{aligned} \text{módulo} &= m \\ \text{potencias} &= a^0; a^1; a^2; \dots \\ \text{restos} &= r^0; r^1; r^2; \dots \end{aligned}$$

Luego: $a^0 = \overset{\circ}{m} + r_0$

$$a^1 = \overset{\circ}{m} + r_1$$

$$a^2 = \overset{\circ}{m} + r_2$$

.
.
.
.

LEY DE FORMACION DE LOS RESTOS POTENCIALES

(1) "Cuando m y a contienen los mismos factores primos"

Ejemplo:

$$m = 54 = 2 \cdot 3^3 \quad a = 12 = 2^2 \cdot 3$$

Módulo = 54

Potencias = $12^0, 12^1, 12^2, 12^3, 12^4, 12^5, \dots$

Restos = 1; 12; 36; 0; 0; 0;

Nótese que: ¡Hay un instante en que los restos se vuelven nulos!

(2) "Cuando todos los factores primos m son diferentes a los factores primos de a"

Ejemplo:

$$m = 28 = 2^2 \cdot 7 \quad a = 15 = 3 \cdot 5$$

módulo = 28

potencia = $15^0; 15^1; 15^2; 15^3; 15^4; \dots$

restos = 1, 15, 1, 15, 1;

Grupo Periódico: a su cantidad de elementos se llama GAUSSIANO
 Para este ejemplo: GAUSSIANO = 2

Nótese que: ¡Siempre habrá un grupo de restos que se repetirán periódicamente!

(3) "Cuando m y a contienen algunos factores primos iguales y otros diferentes"

Ejemplo:

$$m = 40 = 2^3 \cdot 5 \quad a = 12 = 2^2 \cdot 3$$

módulo = 40

potencia = $12^0; 12^1; 12^2; 12^3; 12^4; 12^5; 12^6; 12^7 \dots$

$$\text{resto} = \underbrace{1, 12, 24; 8; 16; 32; 24; 8; \dots}_{\text{Grupo no periódico}} \underbrace{\dots}_{\text{Grupo periódico}}$$

Grupo no periódico Grupo periódico
 GAUSSIANO = 4

Nótese que: ¡Siempre habrá un grupo no periódico y otro grupo periódico!

CONTEO DE MÚLTIPLOS

a) ¿Cuántos números de 3 cifras son 7?

Resolución:

Sea $N = 7K$

Como N es de 3 cifras entonces

$$100 \leq N < 1000$$

$$100 \leq 7K < 1000$$

$$\frac{100}{7} \leq K < \frac{1000}{7}$$

$$14,25 \leq K < 142,8$$

$$K \rightarrow 15, 16, 17 \dots\dots\dots 142$$

$$\# \text{ valores de } K = \frac{142 - 14}{1}$$

$$= 128 \text{ valores de } K$$

Como existen 128 valores de K por lo tanto existen 128 números que son de 3 cifras y múltiplo de 7.

b) En el problema anterior

cuántos 7 terminan en cifra 2

Resolución:

$$N = \overset{\circ}{7} = 7K = \begin{matrix} \dots 2 \\ \leftarrow \\ \dots 6 \end{matrix}$$

K seleccionado = 16, 26, 36, ... 136

valores de k

$$\text{seleccionado} = \frac{136 - 6}{10} = \frac{130}{10}$$

$$= 13$$

∴ Existen 13 números 7 que terminan en cifra 2

c) ¿Cuántos números de 3 cifras son 2 y de 3 pero no de 5?

Resolución:

Utilizamos diagrama de Veen

#3 cifras = 900 números

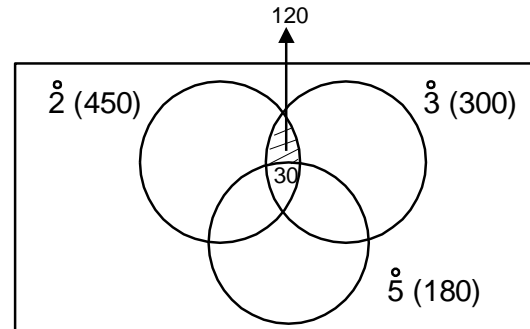
$$\overset{\circ}{2} \rightarrow \frac{900}{2} = 450\#$$

$$\overset{\circ}{3} \rightarrow \frac{900}{3} = 300\#$$

$$\overset{\circ}{6} \rightarrow \frac{900}{6} = 150\#$$

$$\overset{\circ}{5} \rightarrow \frac{900}{5} = 180\#$$

$$\overset{\circ}{30} \rightarrow \frac{900}{30} = 30\#$$



$$\overset{\circ}{2} \text{ y de } \overset{\circ}{3} \text{ pero no } \overset{\circ}{5} = \#6 - \#30$$

$$\overset{\circ}{2} \text{ y de } \overset{\circ}{3} \text{ pero no } \overset{\circ}{5} = 150 - 30 = 120 \#$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Cuántos números de 3 cifras al ser divididos entre 4 y entre 7 dan como residuo 2 en ambos casos?

- a) 31 b) 32 c) 30 d) 33 e) 34

Resolución

$$N = \overline{abc} = \begin{matrix} \overset{\circ}{4} + 2 \\ \leftarrow \\ \overset{\circ}{7} + 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow N = \text{mcm}(\overset{\circ}{4}, \overset{\circ}{7}) + 2$$

$$N = \overset{\circ}{28} + 2$$

$$\Rightarrow \overline{abc} = 28K + 2$$

$$100 \leq 28k + 2 < 1000$$

$$3,5 \leq k \leq 35,6$$

$$\leftarrow \underbrace{4, 5, 6, 7, \dots, 35}$$

Cantidad de valores

$$\frac{35 - 3}{1} = 32$$

Por lo tanto existen 32 #
Rpta. B

2. Calcular la suma de todos los múltiplos de 7 comprendidos entre el 90 y el 318

- a) 6699 b) 6700 c) 6723
d) 6721 e) 6800

Resolución:

Sea el número N de la forma

$$N = \overset{\circ}{7} = 7K$$

$$90 < 7k < 318$$

$$\frac{90}{7} < k < \frac{318}{7}$$

$$12,85 < k < 45,42$$

$$k \rightarrow \underbrace{13, 14, 15, \dots, 45}$$

$$45 - 12 = 33 \text{ valores}$$

Por lo tanto existen 33 múltiplos de 7
estos son 7(13), 7(14), 7(15),...7(45)

$$S = \left[\frac{7(13) + 7(45)}{2} \right] \cdot 33$$

$$S = \frac{7(58)}{2} \cdot 33 = 203 \times 33 = 6699$$

∴ S = 6699

Rpta. A

3. En un barco habían 180 personas, ocurre un naufragio y de los sobrevivientes, 2/5 fuman, 3/7 son casados y los 2/3 son ingenieros. Determinar cuantas personas murieron en dicho accidente.

- a) 60 b) 65 c) 70 d) 75 e) 80

Resolución:

$$S + M = 180$$

Obs. S = sobreviviente

M = muertos

$$\text{Fuman} = \frac{2S}{5} \Rightarrow S = \overset{\circ}{5}$$

$$\text{Casados} = \frac{3S}{7} \Rightarrow S = \overset{\circ}{7}$$

$$\text{Ingenieros} = \frac{2S}{3} \Rightarrow S = \overset{\circ}{3}$$

$$S = \overset{\circ}{105}$$

Luego S = 105

Pero S = 105, 210...

Pero S < 200 ⇒ S = 105

Reemplazando 105 + M = 180

M = 75

Rpta. D

PRACTICANDO

4. A una reunión de 2 países asistieron 400 personas. De los representantes del primer país, se sabe que los 2/5 son economistas, los 3/7 son agrónomos y los 3/8 son biólogos. ¿Cuántos representan al segundo país?

- a) 280 b) 260 c) 120
d) 240 e) 140

Rpta. 120

5. En una academia hay 510 alumnos. De los hombres, los 3/4 eran menores de 17 años; los 2/5 estudiaron el ciclo anterior y los 4/9 quieren ser ingenieros. Si las mujeres están comprendidas entre 100 y 200. Hallar el número de hombres menores de 17 años.

- a) 280 b) 200 c) 270
 d) 150 e) 240

Rpta. 270

6. En una fiesta donde asistieron 280 personas entre damas, caballeros y niños, la cantidad de caballeros que no bailaban en un momento dado era igual a la cuarta parte del número de damas; la cantidad de niños asistentes era igual a la séptima parte del número de damas. Si la quinta parte de las damas están casadas, se desea saber cuántas damas no bailaban en dicho momento.

- a) 55 b) 65 c) 45 d) 75 e) 80

Rpta. 55

7. Si: $a + b + c = 6$.

Entonces: $abc + cab + bca$
 Siempre es múltiplo de:

- a) 11 b) 74 c) 7
 d) 13 e) 27

Rpta. 74

**PROBLEMAS PARA
 RESOLVER EN CLASE**

1. Del 1 al 5000, cuántos números son:
 I Divisibles por 16
 II Divisibles por 13
 Dar la suma de ambos resultados.
- a) 646 b) 672 c) 696
 d) 698 e) 692
2. ¿Cuántos números de cuatro cifras son divisibles entre 11?
 a) 800 b) 809 c) 810
 d) 819 e) 820

3. Hallar cuántos números de tres cifras que terminan en 4 resultan ser múltiplos de 7

- a) 72 b) 90 c) 29
 d) 13 e) 10

4. En un barco donde iban 100 personas ocurre un naufragio. De los sobrevivientes la onceava parte son niños y la quinta parte de los muertos eran casados. ¿Cuántos murieron?

- a) 55 b) 5 c) 45
 d) 15 e) 30

5. En un salón de 50 alumnos se observa que la séptima parte del número de mujeres son rubias y la onceava parte del número de hombres usan lentes. ¿Cuántos hombres no usan lentes?

- a) 22 b) 28 c) 2
 d) 20 e) 4

6. En una división el divisor es $\overset{0}{11}+3$ el cociente $\overset{0}{11}+8$ y el resto $\overset{0}{11}-2$. Entonces el dividendo es:

- a) $\overset{0}{11}+3$ b) $\overset{0}{11}+1$ c) $\overset{0}{11}+9$
 d) $\overset{0}{11}$ e) $\overset{0}{11}+4$

7. ¿Cuántos números de dos cifras al ser divididos entre 21 el resto que se obtiene es 3?

- a) 3 b) 4 c) 5
 d) 6 e) 7

8. El número $\overline{a00a}$ tiene como divisores a:

- a) 11 b) 13 c) 7
 d) 77 e) todas

9. Calcule cuántos números positivos de 4 cifras hay tal que al expresado a base 5,6 y terminan en cifras 2, 3 y 4 respectivamente.
- a) 38 b) 40 c) 41
d) 43 e) 68
10. Si: $A = \overline{mcd\overset{0}{u}} = 13$
Además $\overline{du} = 3(\overline{mc} + 2)$
Calcule cuántos valores tiene A.
- a) 2 b) 1 c) 3
d) 4 e) 5
11. Con S/.500 se compraron 100 artículos entre A, B y C, si los precios de cada uno son S/.50, S/.10 y S/.1 respectivamente. Calcule cuánto se compró de cada artículo.
- a) 1; 39 y 60 b) 2; 40 y 59
c) 8, 36 y 56 d) 5; 30 y 65
e) 8; 34 y 58
12. Halle el menor número de 4 cifras tal que al expresarlo en las bases 2; 5 y 9 sus cifras terminales respectivas fueron: 101; 10, y 5
- a) 1850 b) 1805 c) 1580
d) 1085 e) 1508
13. Si la cuarta parte de los alumnos de un salón aprobaron aritmética y la novena parte aprobaron álgebra. ¿Cuántos alumnos hay en dicho salón si es menor que 50?
- a) 457 b) 458 c) 459
d) 460 e) 461
14. Al dividir dos números entre 15 los residuos son 13 y 11. Hallar el residuo del producto de éstos números entre 15.
- a) 16 b) 32 c) 42
d) 48 e) 8
15. ¿Cuántos números del uno al mil son múltiplos de 5 pero no de 25?
- a) 200 b) 18 c) 150
d) 100 e) 160
16. Del 1 al 1000 ¿Cuántos son 2 ó 3? Dar como respuesta la suma de las cifras de dicho número.
- a) 15 b) 17 c) 21
d) 19 e) 23
17. ¿Cuántos números positivos no mayores que 5 000 son múltiplos de 5 y 6 a la vez pero no de 7?
- a) 133 b) 143 c) 137
d) 166 e) 123
18. Calcular cuántos números de 4 cifras son divisibles por 9 y por 15 pero no por 25.
- a) 160 b) 170 c) 180
d) 150 e) 130

DIVISIBILIDAD II

DIVISIBILIDAD II

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Llamados Criterios de Divisibilidad a ciertas reglas prácticas que aplicadas a las cifras de un numeral permitirán determinar su divisibilidad respecto a cierto módulo.

Criterio de divisibilidad entre 3 o 9

Un numeral es divisible entre 3 (o entre 9) si y sólo si la suma de sus cifras es divisible entre 3 (o entre 9).

$$\begin{array}{l} \overline{abcd} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad a+b+c+d = 3 \\ \overline{abcd} = 9 \quad \Leftrightarrow \quad a+b+c+d = 9 \end{array}$$

Ejercicio: Calcular el valor de "x" sabiendo que $\overline{67x414}$ es divisible entre 9.

Resolución: $\overline{67x414} = 9$

Entonces:

$$\begin{array}{l} 6 + 7 + x + 4 + 1 + 4 = 9 \\ \longrightarrow 22 + x = 9 \end{array}$$

$$\therefore \boxed{x = 5}$$

Criterio de divisibilidad entre 11

Un numeral es divisible entre 11 si y sólo si la diferencia entre la suma de sus cifras de orden impar y la suma de sus cifras de orden par es divisible entre 11.

$$\overline{abcde} = 11 \quad \Leftrightarrow \quad a - b + c - d + e = 11$$

Ejercicio: ¿Cuál es el valor que debe tomar "y" para que el numeral $\overline{14y17}$ sea divisible entre 11?

Resolución:

$$\overline{14y17} = 11$$

Entonces:

$$1 - 4 + y - 1 + 7 = 11$$

$$\longrightarrow 3 + y = 11$$

$$\therefore \boxed{y = 8}$$

Criterios de divisibilidad entre potencias de 2

- Un numeral es divisible entre 2; (2^1) si y sólo si su última cifra es par.
- Un numeral es divisible entre 4; (2^2) si y sólo si el numeral formado por sus 2 últimas cifras es divisible entre 4.
- Un numeral es divisible entre 8; (2^3) si y sólo si el numeral formado por sus 3 últimas cifras es divisible entre 8.

$$\begin{array}{l} \overline{abcde} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad e = 2 \\ \overline{abcde} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{de} = 2 \\ \overline{abcde} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{cde} = 8 \end{array}$$

Ejercicio: ¿Qué valor debe asignársele a "z" para que el numeral $\overline{11443z}$ sea divisible entre 8?

Resolución: $\overline{11443z} = 8$

Como $8 = 2^3$: $\overline{43z} = 8$

$$\therefore \boxed{z = 2}$$

Criterios de divisibilidad entre potencias de 5

- Un numeral es divisible entre 5 sí y sólo sí su última cifra es 0 ó 5.
- Un numeral es divisible entre 25 sí y sólo sí el numeral formado por sus 2 últimas cifras es divisible entre 25.
- Un numeral es divisible entre 125 sí y sólo sí el numeral formado por sus 3 últimas cifras es divisible entre 125.

$$\begin{aligned} \overline{abcde} = 5 &\Leftrightarrow e = 0 \text{ ó } 5 \\ \overline{abcde} = 25 &\Leftrightarrow \overline{de} = 25 \\ \overline{abcde} = 125 &\Leftrightarrow \overline{cde} = 125 \end{aligned}$$

Ejercicio: ¿Cuál es el valor de la suma de los valores que deben reemplazar a "m" y "n" en el numeral $\overline{87653mn}$ para que sea divisible entre 125?

Resolución:

Como $125 = 5^3$:

$$\begin{aligned} \overline{87653mn} &= 125 \\ \overline{3mn} &= 125 \end{aligned}$$

Luego: $m = 7 \wedge n = 5$

Criterio de divisibilidad entre 7

Un numeral es divisible entre 7 si al multiplicar a cada una de sus cifras (a partir de la derecha) por ; 1 ; 3 ; 2 ; -1 ; -3 ; -2 ; 1 ; 3 ; ... y luego efectuar la suma algebraica resultante es divisible entre 7.

$$\overline{abcdefg} = 7 \Leftrightarrow a - 2b - 3c - d + 2e + 3f + g = 7$$

Ejercicio: ¿Cuál es el valor de "a" si el numeral $\overline{13a372}$ es divisible entre 7?

Resolución:

$$\overline{13a372} = 7$$

Entonces:

$$\begin{aligned} -2 - 9 - a + 6 + 21 + 2 &= 7 \\ \longrightarrow 18 - a &= 7 \\ \therefore a &= 4 \end{aligned}$$

Criterio de divisibilidad entre 13

Un numeral es divisible entre 13 si al multiplicar a cada una de sus cifras (a partir de la derecha) por ; 1 ; -3 ; -4 ; -1 ; -3 ; 4 ; 1 ; -3 ; -4 ; ... y luego efectuar la suma algebraica resultante es divisible entre 13.

$$\overline{abcdefg} = 13 \Leftrightarrow a + 4b + 3c - d - 4e + 3f + g = 13$$

Ejercicio: ¿Qué valor debe tomar "b" en el numeral $\overline{128b306}$ si es divisible entre 13?

Resolución:

$$\overline{128b306} = 13$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1 + 8 + 24 - b - 12 - 0 + 6 &= 13 \\ \longrightarrow 27 - b &= 13 \\ \therefore b &= 1 \end{aligned}$$

Criterios de divisibilidad entre 33 ó 99

- Un numeral es divisible entre 33 si al multiplicar a cada una de sus cifras (a partir de la derecha) por ; 1 ; 10 ; 1 ; 10 ; 1 ; ... y luego efectuar la suma algebraica resultante es divisible entre 33.
- Un numeral es divisible entre 99 si al multiplicar a cada una de sus cifras (a partir de la derecha) por ; 1 ;

10 ; 1 ; 10 ; 1 ; ... y luego efectuar la suma algebraica resultante es divisible entre 99.

$$\overline{abcde} = 33 \Leftrightarrow a+10b+c+10d+e = 33$$

$$\overline{abcde} = 99 \Leftrightarrow a+10b+c+10d+e = 99$$

Ejercicio: Calcular (d + e) si el numeral $\overline{56d01e}$ es divisible entre 99.

Resolución:

$$\overline{56d01e} = 99$$

$$10(5) + 1(6) + 10d + 1(0)$$

$$+ 10(1) + e = 99$$

$$\longrightarrow 66 + \overline{de} = 99$$

$$\longrightarrow \overline{de} = 99 - 66$$

$$\text{Luego: } d = 3 \wedge e = 3$$

$$\therefore d + e = 6$$

Criterio General de Divisibilidad

Sea: $N = \overline{z \dots \dots \dots edcba}_x$

Para que se cumpla que: $N = \overline{m} + r$
Es condición necesaria y suficiente:

$$ar_1 + br_2 + cr_3 + \dots = \overline{m} + r$$

denominando:

“Criterio General de Divisibilidad”

Donde: $r_1; r_2; r_3 \dots$ son los restos potenciales de x, respecto al módulo m. (se considera el resto por defecto o por exceso cuyo valor absoluto sea menor).

Ejemplo:

“Deducir el criterio de divisibilidad por 7”

Solución:

Sea $N = \overline{z \dots edcba} = \overline{7} + r$
módulo = 7

potencia = $10^0; 10^1; 10^2; 10^3; 10^4; 10^5; 10^6; \dots$

restos = 1; 3; 2; 6; 4; 5; 1
 $\underbrace{-1 \quad -3}_{-2}$ (restos por exceso)

Grupo Periódico = 6
GAUSSIANO = 6

Reemplazando en c.g. de d. Tenemos:

$$1.a+3.b+2.c-1.d-3.e-2f+\dots = \overline{7} + r$$

Es decir:

“Para investigar la divisibilidad por 7, de derecha a izquierda se distribuyen los coeficientes:

1; 3; 2; -1; -3; -2; 1; 3; 2;.....
el resultado debe ser múltiplo de 7”

Algunos Criterios de divisibilidad

Divisibilidad por 3 y 9

Sea: $N = \overline{z \dots \dots \dots cba}$

$$N = \overline{3} + r \Leftrightarrow z + \dots + c + b + a = \overline{3} + r$$

$$N = \overline{9} + r \Leftrightarrow z + \dots + c + b + a = \overline{9} + r$$

Divisibilidad por 7:
(ya analizado)

Divisibilidad por 11:

$$\overline{z \dots \dots \dots fedcba} = \overline{11} + r$$

$$\Leftrightarrow (a+c+e+\dots) - (b+d+f+\dots) = \overline{11} + r$$

Divisibilidad por 2; 4; 8; 16

$$N = \overline{z\dots\dots edcba} \begin{cases} N = 2 \Leftrightarrow \overline{a} = 2 \\ N = 4 \Leftrightarrow \overline{ba} = 4 \\ N = 8 \Leftrightarrow \overline{cba} = 8 \\ N = 16 \Leftrightarrow \overline{dcba} = 16 \end{cases}$$

Divisibilidad por 5; 25; 125; 625

$$N = \overline{z\dots\dots edcba} \begin{cases} N = 5 \Leftrightarrow \overline{a} = 5 \\ N = 25 \Leftrightarrow \overline{ba} = 25 \\ N = 125 \Leftrightarrow \overline{cba} = 125 \\ N = 625 \Leftrightarrow \overline{dcba} = 625 \end{cases}$$

¡IMPORTANTÍSIMO!

¿COMO HALLAR RESTOS POTENCIALES?

¡FACIL!

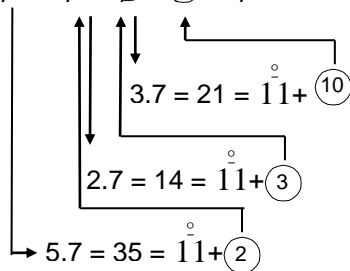
"El residuo anterior se multiplica por la base y se divide entre el módulo"

Ejemplo:

Restos Potenciales de 7 respecto a 11:

$P = 7^0; 7^1; 7^2; 7^3; 7^4; 7^5; \dots\dots\dots$

$R = 1; 7; 5; 2; 3; 10; \dots$



Divisibilidad por 13

Módulo = 13

Potencia = $1^0; 10^1; 10^2; 10^3; 10^4; 10^5; 10^6; \dots$

Restos = 1; 10; 9; 12; 3; 4; 1...

$1; -3; -4; -1; 3; 4; 1; \dots$

Grupo Periódico

Es decir:

"Para investigar la divisibilidad por 13, de derecha a izquierda se distribuyen los coeficientes:

$1; -3; -4; -1; 3; 4; \dots$

El resultado debe ser múltiplo de 13"

DE MANERA SIMILAR SE PUEDEN DEDUCIR CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD PARA OTROS NUMEROS

DIVISIBILIDAD COMPUESTA

"Si N es divisible por A y B, lo será por su producto, siempre que A y B.

Tenga como UNICO DIVISOR COMUN la unidad"

$$N \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases} \Rightarrow N = 12$$

$$N \begin{cases} 9 \\ 5 \end{cases} \Rightarrow N = 45 \text{ etc.}$$

"Si N es divisible por A; por B y por C, lo será por su producto, siempre que todas las combinaciones binarias posibles tengan como UNICO DIVISOR COMUN la unidad" por Ejemplo.

$$N \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 5 \end{cases} \therefore N = 30$$

Ejercicio:

Decir si la proposición es verdadera o falsa:

(1) $12113001054 = \overline{7}$

(2) $9446660023 \neq \overline{11}$

(3) $1526701234 = \overline{13} + 2$

En particular si A y B son PEPSI (d=1)

$$x = x_0 + B \cdot t ; y = y_0 - A \cdot t . t \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo:

Resolver la ecuación

$$34x + 38y = 250 \dots (I)$$

Solución:

- Simplificando al máximo la ecuación, dividiendo miembro a miembro entre el MCD (34 y 38)=2

Entonces:

$$17x + 19y = 125 \dots\dots\dots (II)$$

- Convenientemente expresemos la ecuación en función del múltiplo del menor coeficiente.

De (II): $17x + (17 + 2)y = 17x + 6$
 $\rightarrow 17x + 17y + 2y = 17x + 6$

$2(y-3) = 17$, entonces $y - 3 = 17$
 $\rightarrow y = 17 + 3$

En particular si $17=0$, entonces $y_0 = 3$
 Reemplazando en (II):

$17x + 19(3) = 125$, entonces $x_0 = 4$
 La solución general es:
 $x = 4 + 19t$

$y = 3 - 17t$ } donde t (entero cualquiera)

Basta reemplazar "t" por valores enteros, para determinar todas las soluciones posibles, así:

t	-2	-1	0	1
x	-34	-15	4	23
y	37	20	3	-14

EJERCICIOS

- ¿Cuántos Valores puede tener "n" para que: $\overline{n^2(n+3)n}$ sea divisible entre 2?
 a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5
- Para que: $\overline{2aa^2} = 3$, la suma de los valores de "a" es:
 a) 7 b) 10 c) 12
 d) 15 e) 18
- Si $\overline{357a^2}$ al ser dividido entre 9 el resto obtenido es 4. Hallar "a"
 a) 1 b) 3 c) 4
 d) 5 e) 6
- Calcular el resto de dividir: $\overbrace{444\dots444}^{49 \text{ cifras}}$ entre 7
 a) 2 b) 4 c) 6
 d) 5 e) 3
- Si \overline{abc} se multiplica por 11 se obtiene $\overline{9n8n}$. Hallar. a + b + c
 a) 16 b) 14 c) 12
 d) 10 e) 7
- Hallar: a.b
 Si: $\overline{6a74b14} = 99$
 a) 4 b) 6 c) 8
 d) 12 e) 20
- Hallar el valor de 10.a si el número de la forma: $\overline{(a+4)a(a+3)(a+1)}$ al ser dividido entre 7 de cómo resto por exceso 4.
 a) 40 b) 30 c) 50
 d) 60 e) 80

8. Determinar el menor número de la forma $\overline{1x8y2}$ que sea divisible por 36. Dar como respuesta: $x + y$
- a) 7 b) 18 c) 2
d) 1 e) 6
9. Si: $\overline{aboab} = 221$
Hallar la suma de todos los valores posibles de "b"
- a) 12 b) 13 c) 14
d) 20 e) 25
10. Al dividir $\overline{28a13b}$ entre 36 el residuo es 34. Calcular: $a + b$
- a) 8 b) 9 c) 10
d) 11 e) 12
11. Determinar el mayor numeral de la forma \overline{ababab} que es múltiplo de 35 e indicar el valor de $a \cdot b$
- a) 10 b) 35 c) 45
d) 40 e) 30
12. Calcular el residuo de dividir $\overline{a7b9c}$ entre 7 sabiendo que $\overline{a1b3c5} = 7 + 5$
- a) 2 b) 6 c) 1
d) 5 e) 3
13. Si: $\overline{513x}_{(8)} + \overline{12x5}_{(8)} = 8$
Calcular "x"
- a) 3 b) 2 c) 3
d) 1 e) 5
14. Si: $\overline{ab} = 13 + 5$ $\overline{cd} = 13 + 6$ ¿Qué residuo se obtendrá al dividir \overline{abcd} entre 13?
- a) 9 b) 10 c) 11
d) 12 e) 8
15. Sabiendo que:
 $\overline{a0(a-1)(a+1)} = 19$
Hallar "a"
- a) 2 b) 3 c) 4
d) 7 e) 8
16. Hallar el mayor número de 3 cifras que sea igual a 27 veces la suma de sus cifras. Dar como respuesta la cifra de orden 1
- a) 4 b) 6 c) 8
d) 2 e) 3
17. Hallar el residuo que se obtiene al dividir: $\overline{ab1ab4}^{\overline{ab5}}$ entre 11
- a) 0 b) 1 c) 3
d) 5 e) 4
18. Sabiendo que :
 $\overline{abc}^a = 9 + 4$
 $\overline{abc}^b = 9 + 5$
 $\overline{abc}^c = 9 - 1$
¿Cuál es el residuo de dividir $\overline{abc}^{\overline{abc}}$ entre 9?
- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

NÚMEROS PRIMOS

INTRODUCCIÓN

El estudio de los números primos fue abordado por matemáticas desde hace mucho tiempo. Fue el matemático griego **EUCLIDES** el primero en descubrir que los números primos constituyen una serie infinita (Aprox. 350 A a.J.c).

En el campo de los enteros

$\mathbb{Z} := 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Se descubre inmediatamente la existencia de números p cuyos únicos divisores son los números $1, -1, p, -p$ números con esta propiedades y que no sean 1 y -1 se denominan primos. Podemos decir entonces que un número entero es primo si y sólo si posee exactamente 4 divisores.

(Aspectos de la teoría elemental de Números Enzo. R. Gentile (Universidad de Buenos Aires))

Por muchos años ilustres matemáticos trataron de encontrar una formula para determinar a los números primos entre ellos:

Euler (1772)

$x^2 - x + 41 = \text{primo}, x = 0, 1, 2, \dots, 40$

Legendre (1789)

$x^2 + x + 41 = \text{primo}, x = 0, 1, 2, \dots, 39$

También Pierre Fermat conjeturo que los números $F_n := 2^{2^n} + 1$ eran primos para todos los $n \in \mathbb{N}$

Esta conjetura resultó errónea pues para $n = 5$, Euler probó que F_5 es divisible por 641. Se sabe que F_n es primo para $0 \leq n \leq 4$ y compuestos para $5 \leq n \leq 19$ y para muchos valores de n . Se ignora hasta el presente si existen infinitos primos de la forma F_n (primos de **FERMAT**). Como un dato actual **ANDREW. J. Wiles** Matemático Británico de la Universidad de **PRINCETON**, demostró el celeberrimo Teorema de **Fermat** en 1994, tras un decenio de concentrados esfuerzos en el cual **Fermat** afirmaba que no existían soluciones enteras no triviales para la ecuación $a^n + b^n = c^n$, donde n es un entero cualquiera mayor que 2. **Wiles** para completar su cálculo de 100 paginas necesito recurrir a muchas modernas ideas de la matemática y desarrollarlas más todavía.

En particular tuvo que demostrar la conjetura de **Shimura - Taniyama** para un subconjunto de curvas elípticas, objetos descritos por ecuaciones cúbicas tales como

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

DEFINICIONES BÁSICAS

1. Número Primo Absolutos:

Definido en \mathbb{Z}^+ un número será primo absoluto si posee dos divisores distintos una de ellos la unidad y el otro el mismo número.

Ejemplo 3,5,7,2 etc.

2. Divisor:

Es aquel número entero y positivo que divide exactamente a otro número entero y positivo.

$$8 \Rightarrow \underbrace{1, 2, 4, 8}_{\text{Divisores}}$$

$$16 \Rightarrow \underbrace{1, 2, 4, 8, 16}_{\text{Divisores}}$$

3. Número Compuesto:

Es aquel número \mathbb{Z}^+ que tiene más de dos divisores.

Ejemplo 6: $\underbrace{1, 2, 3, 6}_{\text{mas de 2 divisores}}$
 4: $\underbrace{1, 2, 4}$

Determinar si los siguientes números son primos absolutos (P) o compuestos (c)

- | | | |
|--------|--------|--------|
| 5 () | 12 () | 17 () |
| 9 () | 13 () | 29 () |
| 11 () | 23 () | 31 () |

4. Primos Relativos:

Llamados también **CO-PRIMOS** o **PRIMOS ENTRE SI** son aquellos que al compararse poseen como único divisor a la unidad.

PRIMOS ENTRE SI (P.E.Si)

Ejemplo 2 y 13 por primos entre si

$$\begin{array}{l} \text{Divisores} \\ 2 : \boxed{1} , 2 \\ 13 : \boxed{1} , 13 \\ \downarrow \\ \text{único divisor común} \\ \text{Divisores} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \overbrace{9 : \boxed{1} , 3, 9} \\ 20 : \boxed{1} , 2, 4, 5, 10, 20 \\ \downarrow \\ \text{único divisor común} \end{array}$$

En \mathbb{Z}^+ { I. Números Simples { - La unidad
 - Número primos
 II. Números Compuestos

5. Números Simples:

Son aquellos números que tienen a lo más 2 divisores

6. La Unidad:

Es el único número entero positivo que posee un solo divisor, él mismo.

PROPIEDADES

- i) El conjunto de los números primos es infinito, y no existe formula alguna para determinar todos los números primos.
- ii) El 2 es el único número primo par.
- iii) Los únicos números primos que son números consecutivos son el 2 y 3.
- iv) Si "p" es un número primo, además $p > 2$ entonces
 $p = 4 + 1$ ó $p = 4 - 1$
 Ejemplo: $37 = 4 + 1$
 $19 = 4 - 1$
- v) Si "p" es un número primo, además $p > 3$, entonces:
 $p = 6 + 1$ ó $p = 6 - 1$
 Ejemplo: $41 = 6 - 1$ $37 = 6 + 1$
 $29 = 6 - 1$

¿Cómo se determina si un número es primo o no?

Se divide al número entre cada uno de los números primos menores o iguales a su raíz cuadrada aproximada. Si en ningún caso la división es exacta entonces el número es primo en caso contrario es compuesto (Criterio de la raíz cuadrada)

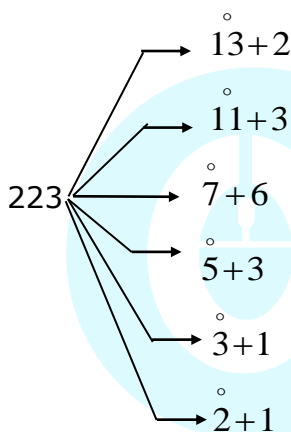
Ejemplo:

¿223 es un número primo?

Paso 1 $\sqrt{223, \dots} \approx 14$

Paso 2 # primos ≤ 14
 $\hookrightarrow 2, 3, 5, 7, 11, 13$

Paso 3



Como en ningún caso las divisiones son exactas, entonces 223 es un número primo.

Números PESi 2 o 2

Son aquellos números PESi, que al formar grupos de 2 con dichos números resultan también PESi.

Ejemplo: 8,21 y 25 son PESi 2 a 2

Porque: 8 y 21 son PESi
 8 y 25 son PESi
 21 y 25 son PESi

PROPIEDADES

- Si un grupo de números son PESi. 2 a 2 entonces son PESi lo reciproco no siempre se cumple.

- Dos números consecutivos siempre son PESi.

Ejemplo: 24 y 25 son PESi

CRIBA DE ERATOSTENES

Eratostenes de Cirene, nació en 276 A.C. en Cirene (ahora Shahhat, Libia) y falleció en 197 A.C. en Alejandría, Egipto. Es recordado por su aporte en la teoría de los números primos.

Y dio el método que nos da a conocer los primeros números primos absolutos de la siguiente manera: Se colocan los números naturales consecutivos a excepción de la unidad y se procede a eliminar los múltiplos de 2 excepto el 2, todos los múltiplos de 3 excepto el 3 y así sucesivamente hasta eliminar los múltiplos de la raíz cuadrada aproximada del número excepto esta, luego los números que quedan serán los primeros primos absolutos.

Se tiene:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Los primos absolutos son:

.....

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMETICA (Descomposición Canonica)

“Todo número entero positivo mayor que la unidad se puede expresar como la multiplicación indicada de sus divisores primos diferentes elevados

para uno de ellos a exponente entero positivos”.

Esta representación es única y se le denomina como la descomposición Canónica de dicho número

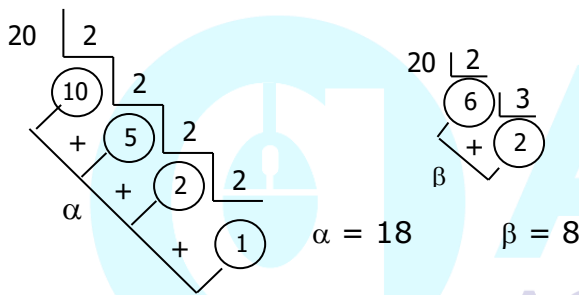
Ejemplo: Descomponer canónicamente.

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 45 = 3^2 \times 5$$

Descomposición Canónica de un factorial

Ejemplo

$$20! = 2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\delta \times 7^d \times 11^e \times 13^f \times 17^g \times 19^h$$

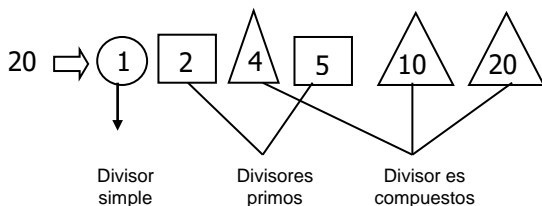


- $\alpha = 18$
- $\beta = 8$
- $\delta = 4$
- $d = 2$
- $e = 1$
- $f = 1$
- $g = 1$
- $h = 1$

Analógicamente

$$\begin{array}{r|l} 20 & 5 \\ & 4 \end{array}$$

ESTUDIO DE LOS DIVISORES DE UN NUMERO



1. Cantidad de Divisores de un Número N. CD (N)

$$\text{CD}(N) = \text{CD}_p + \text{CD}_c + 1$$

Donde:
 CD_p = Cantidad de divisores primos
 CD_c = Cantidad de divisores compuestos
 $\text{CD}(N)$ = Cantidad total de divisores

También se define:

$$\text{CD}_{\text{total}}(N) = \text{CD}_{\text{simple}} + \text{CD}_c$$

Donde:

$$\text{CD}_{\text{simple}} = 1 + \text{CD}_p$$

También si la D. Canónica del número

$$N = A^a \cdot B^b \cdot C^c$$

$$\Rightarrow \text{CD}(N) = (a + 1)(b + 1)(c + 1) \dots$$

Hallar la CD200

$$\begin{array}{r|l} 200 & 2 \\ 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 200 = 2^3 \times 5^2$$

$$\text{CD}_{200} = (3 + 1)(2 + 1) = 4(3) = 12$$

2. Suma de Divisores de un Número N

$$\text{SD}_N = \frac{A^{\alpha+1} - 1}{A - 1} \cdot \frac{B^{\beta+1} - 1}{B - 1} \cdot \frac{C^{\gamma+1} - 1}{C - 1}$$

$$\text{SD}_{100} = \left(\frac{2^{2+1} - 1}{2 - 1} \right) \left(\frac{5^{2+1} - 1}{5 - 1} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{SD}_{100} &= \frac{7}{1} \times \frac{124}{4} \\ &= 7 \times 31 = 217 \end{aligned}$$

Otro método (Método combinatorio)

$$\begin{array}{c}
 100 = 2^2 \times 5^2 \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 2^0 \quad 5^0 \\
 2^1 \quad 5^1 \\
 \underline{2^2 \quad 5^2} \\
 7 \times 31 = 217
 \end{array}$$

3. Suma de Inversas de los Divisores SID_N

$$\begin{aligned}
 SID_N &= \frac{SD_N}{N} \\
 SID_{100} &= \frac{SID_{100}}{100} = \frac{217}{100} = 2,17
 \end{aligned}$$

4. Producto de los Divisores de un número N PD_N

$$\boxed{PD_N = \sqrt{N^{CDN}} = N^{CDN/2}}$$

$$PD_{100} = 100^{9/2}$$

5. Indicador de Euler o Función de Euler $\psi(N)$

$$N = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\delta \dots$$

$$\psi(N) = N \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots$$

Ejemplo: Determinar cuantos números menores que 10 son primos con el Números menores que 10

$$\begin{array}{cccccccc}
 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9 \\
 X & & X & & & & X & & X
 \end{array}$$

Son primos con 10 ~ 1, 3, 7, 9

4#

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$\psi(10) = (10) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Si $N = 15 \cdot 30^n$ tiene 294 divisores. Hallar "n".

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 8

Resolución:

Haciendo la descomposición canónica de $15 \cdot 30^n$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 15 \cdot 30^n &= 3 \cdot 5 (2 \cdot 3 \cdot 5)^n = 3 \cdot 5 \cdot 2^n \cdot 3^n \cdot 5^n \\
 &= 2^n \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{n+1}
 \end{aligned}$$

$$CD_{(N)} = (n + 1) (n + 2)^2$$

Por dato del problema se tiene que:

$$\underbrace{(n + 1)}_6 \cdot \underbrace{(n + 2)^2}_{7^2} = 294 = 6 \cdot 7^2$$

Igualando factores se puede observar que "n" tomará el valor de 5.

2. Si: $4^{k+2} - 4^k$ tiene 92 divisores, se puede calcular el valor de "k-1".

- a) 3 b) 10 c) 11 d) 12 e) 13

Resolución:

Descomponemos canónicamente al número

$$4^{k+2} - 4^k, \text{ para ello factorizamos } 4^k:$$

$$4^{k+2} - 4^k = 4^k (4^2 - 1) = 4^k \cdot 15 = 4^k \cdot 5 \cdot 3$$

$$= (2^2)^k \cdot 3 \cdot 5 = 2^{2k} \cdot 3 \cdot 5$$

Con lo cual se obtiene que:

$$4^{k+2} - 4^k = 2^{2k} \cdot 3 \cdot 5$$

$$CD_{(4^{k+2} - 4^k)} = (2k+1)(2)(2) = 4(2k + 1)$$

Por dato del problema se tiene:

$$CD_{(4^{k+2} - 4^k)} = 92$$

Reemplazando:

$$4(2k + 1) = 92$$

$$2k + 1 = 23$$

Se deduce que "k" será igual a 11

Me piden: "k - 1" → k - 1 = 10

3. ¿Cuántos números de 3 cifras son primos relativos con 6?

- a) 200 b) 150 c) 300
d) 400 e) 600

Resolución:

Calculando los números primos relativos con 6 por conjuntos; previamente calculamos los números de 3 cifras 2,3 y 6. Los 2: 100, 102, 104,.....,998

$$\# \text{ términos} = \frac{998 - 98}{2} = 450$$

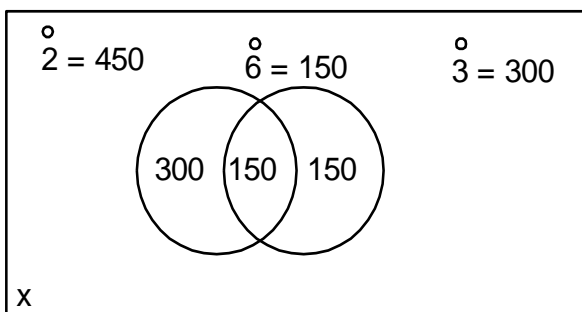
Los 3: 102,105,108,.....,999

$$\# \text{ términos} = \frac{999 - 99}{3} = 300$$

Los 6 se calculan de igual forma; pero más rápidamente: $\frac{900}{6} = 150$

Al final se tiene:

Total de #s de 3 cifras = 900



Con lo cual:

$$X + 300 + 150 + 150 = 900$$

$$X = 300$$

EJERCICIOS

- El número $N = 2^4 \cdot 15^n \cdot 15^5$ tiene 8 divisores que son P.E. si con 12^n . Cuántos divisores de N tiene un sólo factor primo.
a) 10 b) 12 c) 13
d) 14 e) 16
- Hallar n si $M = 20^n \times 30^n$ tiene 1725 divisores compuestos.
a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9
- Si $A = 9 \times 10^n$ tiene 27 divisores. Hallar cuantas cifras tiene A^3 .
a) 9 b) 7 c) 10
d) 12 e) 13
- Cuántos divisores tiene el número N^2 , siendo $N = 72$.
a) 25 b) 24 c) 28
d) 35 e) 36
- Cuántos divisores compuestos tiene N^3 , siendo $N = 96$
a) 54 b) 57 c) 61
d) 60 e) 64
- Calcular el valor del menor número que tenga 14 divisores. Indicar como respuesta la suma de sus cifras.
a) 12 b) 9 c) 6
d) 15 e) 18

7. Cuántos divisores tiene $E = 4^n - 4^{n-2}$ si 65^n tiene $\overline{n1}$ divisores.
- a) 48 b) 36 c) 72
d) 52 e) 64
8. Hallar $a + b$ si:
- $N = 3^a \times 2^b$ tiene 28 divisores cuya suma de cuatro cifras es 9 y 30 divisores múltiplos de 4.
- a) 7 b) 8 c) 11
d) 14 e) 18
9. Hallar el número $A = 2^a \times 7^b$ sabiendo si se divide entre 4, su número de divisores se reduce a su tercera parte y si se multiplica por 14 se duplica su número de divisores.
- a) 14 b) 28 c) 98
d) 196 e) 1372
10. El número $A = 2 \times 3^a \times 7^b$ tiene 40 divisores cuya suma de cifras es divisible por 9 y 30 divisores cuya cifra de menor orden es par. Hallar $a + b$.
- a) 5 b) 7 c) 8
d) 9 e) 12
11. Si el número $E = 2 \times 3 \times 6^n \times 5$ tiene 14 divisores compuestos determinar cuántos divisores de E son cuadrados perfectos.
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
12. Cuántos ceros debe poseer N
- $N = 2000 \dots\dots\dots 00$
Para tener 870 divisores divisible entre 4
- a) 29 b) 28 c) 30
d) 31 e) 248
13. Al multiplicar $N = 21 \times 11^a$ por 33 se duplica el número de divisores. Hallar "a"
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

POTENCIACIÓN

Introducción

Los babilónicos ya habían conocido muy bien la tabla de los cuadrados de los números, tal como lo prueba la tabla de los cuadrados hallados por los arqueólogos a orillas del Eufrotes, en un lugar donde existió un templo.

Ellos emplearon la potencia cuadrada sobre todo para efectuar sus multiplicaciones siguiendo el procedimiento que se indica a continuación:

1. La semisuma de los dos factores la elevan al cuadrado.
2. La semidiferencia de dichos factores la elevaban al cuadrado.
3. La diferencia de estos dos cuadrados obtenidos era el resultado final.

Ejemplo: Efectuar el producto 26×18 , siguiendo el anterior procedimiento.

1. La semisuma de 26 y 18 es 22, y el cuadrado de 22 es 484
2. La semidiferencia de 26 y 18 es 4, y el cuadrado de 4 es 16.
3. La diferencia de 484 y 16 es 468, que viene hacer el producto de 26 por 18.

Notación de la Potenciación:

Bhaskara empleo la inicial de la palabra cuadrado para indicar la "Segunda Potencia (año 1150). El escocés James Hume (1636) quien adopta la actual notación pero cuando los números romanos para exponente. Ya Descartes (1637) adopta los números actuales como exponentes".

Potenciación

Definición: Es una operación matemática que consiste en multiplicar un número por si mismo varias veces.

Así tenemos:

$$P = \underbrace{k \times k \times k \dots \times k}_{n \text{ factores}} = k^n$$

donde $k \in \mathbb{Z}^+$, $n \in \mathbb{Z}^+$

Además k es la base, n es el exponente y P es la potencia de grado n .

POTENCIA PERFECTA DE GRADO "n"

Para que un entero positivo sea una potencia perfecta de grado "n" es condición necesaria y suficiente que los exponentes de los factores primos en su descomposición canónica sean múltiplos de n .

$$\text{Sea } k = \underbrace{a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma}_{\text{Descomposición Canónica (D.C.)}}$$

Descomposición Canónica (D.C.)

Tenemos que:

$$K_n = \underbrace{a^{n\alpha} \times b^{n\beta} \times c^{n\gamma}}_{\text{(D.C.)}}$$

Ejemplos:

$N = 3^6 \times 5^3 \times 7^9$ como 6, 3 y 9 son $\overset{\circ}{3}$ entonces N es una potencia perfecta de grado 3.

$$M = 8 \times 8 = 64 \quad \left\{ \begin{array}{l} 8^2 \text{ es una potencia} \\ \text{perfecta de grado 2} \\ 4^3 \text{ es una potencia} \\ \text{perfecta de grado 3} \end{array} \right.$$

$\therefore 64$ es una potencia de grado 6 ($2^6 = 64$)

CASO PARTICULARES

1. Potencia Perfecta de grado 2 o cuadrado perfecto (K²)

Sea
$$\boxed{a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma}$$

 D.C.

tenemos
$$\boxed{k^2 = a^{2\alpha} \cdot b^{2\beta} \cdot c^{2\gamma}}$$

 D.C.

Ejm. $P = 2^2 \times 3^2 \times 11^6 = k^2$
 $Q = 2^5 \times 3^1 \times 6^3 = 2^5 \times 3^1 \times 2^3 \times 3^3$
 $Q = 2^8 \cdot 3^4 = k^2$

2. Potencia perfecta de grado 3 o cubo perfecto (k³)

Sea
$$\boxed{a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma}$$

 D.C.

tenemos
$$\boxed{k^3 = a^{3\alpha} \cdot b^{3\beta} \cdot c^{3\gamma}}$$

 D.C.

Ejm. $R = 3^{12} \times 5^9 \times 11^6 = k^3$
 $S = 3^7 \times 5 \times 15^2 = 3^7 \times 5 \times 3^2 \times 5^2$
 $S = 3^9 \times 5^3 = k^3$

Aplicación

Determinar el menor entero positivo por el cual hay que multiplicar a 162000 para obtener un número que sea un cuadrado y cubo perfecto a la vez.

Resolución

$162000 \times N = K^6$
 MENOR ENTERO POSITIVO

$2^4 \times 5^3 \times 3^4 \times N = K^6$ Se deduce
 $N = 2^2 \times 5^3 \times 3^5 = 4500$
 Se debe multiplicar por 4500

CRITERIOS DE INCLUSION Y EXCLUSION DE CUADRADOS Y CUBOS PERFECTOS

1. Según la última cifra

K
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
K ²
	0	1	4	9	6	5	6	9	4
K ³
	0	1	8	7	4	5	6	3	2

Se observa:

- Si un número termina en 2,3,7 u 8 no es cuadrado perfecto.
- Un cubo perfecto puede terminar en cualquier cifra.

Ejemplo: ¿Cuáles no son cuadrados perfectos?

- * $\overline{abc3}$ (NO)
- * $\overline{3mn4}$ (SI)
- * $\overline{pq7}$ (NO)

b. Por su terminación en ceros

* $\overline{ab...pq\ 000...0} = k^2; n = \frac{\circ}{2}$
 $\underbrace{\hspace{1cm}}_{N^2} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{n \text{ ceros}}$

Ejemplo:

¿Cuáles son cuadrados perfectos?

- $1690000 = 13^2 \times 10^4 = k^2$
- $22500 = 15^2 \times 10^2 = k^2$
- $1950000 = 195 \times 10^4 \neq k^2$

c. Por su terminación en cifra 5

Ejemplo:

- $25^2 = 625$
- $85^2 = 7225$
- $145^2 = 21025$

Luego:

Si: \overline{abcde}^2 entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} d = 2 \\ \overline{abc} = n(n+1) \\ ce \in \{0,2,6\} \end{array} \right.$$

Ejemplos:

- $15^3 = 3375$
- $25^3 = 15625$
- $65^3 = 274625$

Si $\overline{mnpq5} = k^3$ entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} q = 2 \text{ ó} \\ q = 7 \end{array} \right.$$

d. Por criterios de Divisibilidad

* Todo número: $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\left\{ \begin{array}{l} N^2 \in \{\overset{\circ}{4}, \overset{\circ}{4} + 1\} \\ N^3 \in \{\overset{\circ}{4} - 1, \overset{\circ}{4}, \overset{\circ}{4} + 1\} \end{array} \right.$$

* También se cumple

$$\left\{ \begin{array}{l} N^2 \in \{\overset{\circ}{9}, \overset{\circ}{9} + 1, \overset{\circ}{9} + 4, \overset{\circ}{9} + 7\} \\ N^3 \in \{\overset{\circ}{9} - 1, \overset{\circ}{9}, \overset{\circ}{9} + 1\} \end{array} \right.$$

Ejemplos:

Cuales no son cubos perfectos.

- * $\overline{mn82} \text{ (NO)} \Rightarrow 82 \neq \overset{\circ}{4}, \overset{\circ}{4} - 1, \overset{\circ}{4} + 1$
- * $42875 = 35^3$
- * $373248 = 72^3$

RADICACIÓN

Definición: Es una operación matemática inversa a la potenciación que consiste en que dados dos números llamados índice y radicando se calcula un tercer número llamado raíz donde este último elevado al índice reproduzca el radicando. Así tenemos:

$$R = \sqrt[n]{N} \leftrightarrow N = R^n$$

Donde:

$$N \in \mathbb{Z}^+, n \in \mathbb{Z}^+, n > 1$$

Además:

N es el radicando
n es el índice
R es la raíz enésima

Ejm:

$$\begin{aligned} \sqrt{196} &= 14 \\ \sqrt[3]{64} &= 4 \end{aligned}$$

Observación:

Toda potencia perfecta de grado "n" posee raíz enésima exacta.

1. Raíz Cuadrada:

Se clasifica en:

a) Exacta:

Ejm: $\sqrt{225} \begin{array}{l} \underline{\quad} 15 \\ r = 0 \end{array}$ por que: $225 = 15^2$

En general:

$$\sqrt[N]{K} \begin{array}{l} \underline{\quad} \\ r = 0 \end{array} \leftrightarrow N = K^2$$

b) Inexacta: (r ≠ 0)
Por defecto Por exceso

$$\begin{array}{r} \sqrt{230} \overline{)15} \\ 225 \\ \hline 5 = \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{230} \overline{)16} \\ re = 26 \end{array}$$

∴ 230 = 15² + 5 ∴ 230 = 16² - 26
 En general: En general:

$$\begin{array}{r} \sqrt{N} \overline{)K} \\ r \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{N} \overline{)K+1} \\ r_E \end{array}$$

∴ N = K² + rd ∴ N = (k+1)² - re

Observaciones:

1. r_{min} = 1
2. r_{max} = 2k

$k^2 + rd = (k+1)^2 - re$	$\therefore rd + re = 2k + 1$
---------------------------	-------------------------------

2. Raíz Cúbica:

a) Exacta:

Ejm: $\begin{array}{r} \sqrt[3]{343} \overline{)7} \\ r = 0 \end{array}$

Luego:

$\begin{array}{r} \sqrt[3]{N} \overline{)K} \\ r = 0 \end{array}$
$N = K^3$

b) Inexacta: (r ≠ 0)
Por defecto Por exceso

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{612} \overline{)8} \\ r_d = 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt[3]{612} \overline{)9} \\ re = 117 \end{array}$$

∴ 8³ + 100 = 612 612 = 9³ - 117

En general: En general:

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{N} \overline{)K} \\ r_d \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt[3]{N} \overline{)(K+1)} \\ r_E \end{array}$$

$\therefore N = K^3 + rd$	$\therefore N = (k+1)^3 - re$
---------------------------	-------------------------------

Observaciones:

- 1) $r_{\min} = 1$
 - 2) $r_{\max} = 3k(k+1) = 6$
 - 3) $k^3 + rd = (k+1)^3 - re$
- | |
|------------------------------------|
| $\therefore rd + re = 3k(k+1) + 1$ |
|------------------------------------|

IMPORTANTE:

- 1. RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO CON ERROR MENOR QUE m/n**
 Se utiliza:

$\sqrt{N \times \frac{n^2}{m^2} \times \frac{m}{n}}$
--

- 2. RAÍZ CÚBICA DE UN NÚMERO CON ERROR MENOR QUE m/n**

$\sqrt[3]{N \times \frac{n^3}{m^3} \times \frac{m}{n}}$

Ejemplos:

1. Extraer la raíz cúbica de $\frac{22}{7}$ en menos de $\frac{3}{7}$

Resolución:

La raíz cúbica exacta de $\frac{22}{7}$

Cumple: $\left(\frac{3n}{7}\right)^7 \leq \frac{22}{7} < \left[\frac{3(n+1)}{7}\right]^7$

Despejando:

$$n^3 \leq \frac{22 \times 343}{7 \times 27} < (n+1)^3$$

$$n^3 < 39,9 < (n+1)^3$$

$$\therefore \boxed{n = 3}$$

La raíz buscada será: $3 \times \frac{3}{7} = 1\frac{2}{7}$

REGLA PARA EXTRAER LA RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO

- * Para hallar la raíz cuadrada entera de un número mayor que 100, se divide el número en períodos de 2 cifras empezando por la derecha.
- * Se halla la raíz cuadrada entera del primer período que tendrá una o dos cifras y ella será la primera cifra de la raíz.
- * Se resta mentalmente su cuadrado del primer período a la derecha de la diferencia se baja el período siguiente, del número así obtenido se separa su última cifra de la raíz.
- * El cociente entero obtenido se escribe a la derecha del número que sirvió de divisor y el número obtenido se multiplica por el referido cociente entero mentalmente y se resta del primer resto seguido del segundo período.
- * Si la resta puede efectuarse, la cifra de dicho cociente es buena y será la segunda cifra de la raíz y la resta no puede efectuarse, se rebaja la cifra en una unidad y se somete a análogas comprobaciones hasta obtener la cifra verdadera.
- * A la derecha del resto se baja el período siguiente y así se continúa hasta bajar el último período y encontrar la última cifra de la raíz.

Ejemplo 1

$\begin{array}{r} \sqrt{423184} \\ 625 \\ \underline{625} \\ 684 \\ 000 \\ \underline{68400} \\ 65025 \\ \underline{65025} \\ 3375 \end{array}$	$\begin{array}{l} 650,5 \dots \\ \hline 2 \times 6 = 12 \\ \hline 125 \times 5 \\ \hline 2 \times 65 = 130 \\ \hline 1300 \times 0 \\ \hline 2 \times 650 = 1300 \\ \hline 13005 \times 5 \end{array}$
---	--

Ejemplo 2

Reconstruir:

$$\begin{array}{r} \sqrt{abcdab} \quad \text{xd4} \\ \underline{8-} \\ - - - \\ \underline{3-} \\ -4- \\ - - - \\ 1049 \end{array}$$

Resolución:

$$\begin{array}{r} \sqrt{854825} \quad 924 \\ 92 \rightarrow \underline{81} \downarrow \quad 182 \times 2 \\ \underline{448} \\ \underline{364} \quad 1844 \times 4 \\ 8425 \\ \underline{7376} \\ 1049 \end{array}$$

Identificando:

$$\boxed{a = 8}$$

$$\boxed{b = 5}$$

$$\boxed{c = 4}$$

$$\boxed{x = 9}$$

$$\boxed{d = 2}$$

REGLA PARA EXTRAER LA RAÍZ CÚBICA DE UN NÚMERO

- * Para hallar la raíz cúbica entera de un número de más de 3 cifras se divide en períodos de tres cifras empezando por la derecha.
- * Se halla por la tabla de los cubos de los 9 primeros números, la raíz cúbica entera del primer período y la cifra que resulta es la primera cifra de la raíz, se eleva ésta al cubo, se resta del primer período, a la derecha de la diferencia se escribe el segundo período, se separan las dos últimas cifras de la derecha y el número que queda a la izquierda se divide por el triple del cuadrado de la primera cifra de la raíz.
- * Se tantea por la regla dada dicho cociente entero, si tiene una cifra, o la cifra 9 si el cociente tuviese más de una cifra y se va rebajando de unidad en unidad, hasta obtener la segunda cifra de la raíz; a la derecha del resto obtenido se escribe el período siguiente, del número resultante, se separan las dos últimas cifras de su derecha y se divide el número que queda a la izquierda por el triple del cuadrado del número formado por las dos cifras ya halladas de la raíz.
- * Este triplo del cuadrado se forma sumando tres números que son:
- * El primero: el producto de la última cifra hallada de la raíz por el número que resulta de escribir a la derecha del triplo del número que forman todas las cifras antes calculadas. La última cifra hallada.
- * El segundo, es el resultado de sumar el primero con el triplo del cuadrado del número que forman las cifras halladas de la raíz menos la última.
- * El tercero. Es el cuadrado de la última cifra de la raíz.
- * El cociente entero que este triplo del cuadrado será igual a mayor que la tercera cifra de la raíz, se tantea

este cociente entero por la regla para comprobar la cifra hasta obtener la tercera cifra de la raíz, a la derecha del resto se escribe el período siguiente y así sucesivamente se continúa hasta hallar la última cifra de la raíz.

Sabemos:

$$(d+u)^3 = d^3 + 3d^2 u + 3d u^2 + u^3$$

Ejemplo:

Calcular la raíz cúbica de 752937

$\sqrt[3]{752937}$	196
1 ³ → 1 ↓	3x1 ² x100x9= 2700+
6529	3x1x3x10x9 ² = 2430
5859	9 ³ = $\frac{729}{5859}$
670537	
670536	3x19 ² x100x6=649800+
1	3x19x10x6 ² = 20520
	6 ³ = $\frac{216}{570536}$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Si $abba = k^3$
Halar $b - a$
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Resolución

Se deduce que $\overline{abba} = 11 \cdot \overset{\circ}{11} = 11n$

$$11n = k^3$$

$$\downarrow$$

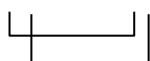
$$112t^3$$

Reemplazando: $\overline{abba} = 11^3 \cdot t^3$

$$\overline{abba} = 1331t^3$$

Dando valores a "t" deducimos que si:
 $t = 1$

$\Rightarrow \overline{abba} = 1331$



$\therefore b - a = 2$ Rpta. b

2. ¿Cuántos números cuadrados perfectos de 3 cifras en base 6 existen?

- a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

Resolución

Del problema $\overline{abc}_6 = k^2$

Sabemos que:

$100_6 \leq \overline{abc}_6 < 1000_6$

$36 \leq k^2 < 216$

$6 \leq k < 14, \alpha$

k tomará $\{6,7,8,\dots,14\}$

9 valores

\therefore **Habrá 9 números** Rpta. D

3. Si $\overline{aba(b-1)} = k^2$

Hallar \overline{ab}

- a) 88 b) 81 c) 82 d) 94 e) 96

Resolución

Del problema: $\overline{abab} - 1 = k^2$

$\overline{abab} = k^2 + 1$

Haciendo la descomposición polinómica por bloques $101 \overline{ab}^2 = k^2 + 1$

Restando 101 a ambos miembros

$101(\overline{ab} - 1) = (k + 10)(k - 10)$

Se diferencian en 20

Entonces:

$\overline{ab} - 1 = 121 \rightarrow \overline{ab} = 122$ (Absurdo)

$\overline{ab} - 1 = 81 \rightarrow \overline{ab} = 82$ Rpta. c

4. ¿Cuántos cubos perfectos existen en:

15.18.1; 15.18.2, 15.18.3, ..., 15.18.7000?

- a) 8 b) 4 c) 12 d) 15 e) 9

Resolución

Forma general de cada término: $15.18.n$

Por condición: $15.18.n = k^3$

$2.3^3 \cdot 5n = k^3$

Con lo cual: $n = 2^2 \cdot 5^2 \cdot t^3 = 100t^3$

Además del problema:

$1 \leq n \leq 7000$

$1 \leq 100t^3 \leq 7000$

$0, \alpha \leq t^3 \leq 70$

$0, w \leq t \leq 4, \beta$

t tomará $\{1,2,3,4\}$

4 valores

\therefore Habrá 4 números Rpta. B

5. Hallar un cubo perfecto de 5 cifras de tal manera que la suma de sus cifras de ordenes impares sea 19 y que la suma de las cifras de ordenes pares sea 8. dar la cifra de las centenas.

- a) 6 b) 7 c) 9 d) 8 e) 5

Resolución:

Del problema: $\overline{abcde} = k^3$

Por dato: $\overline{abcde} \begin{cases} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases} 11$

$\rightarrow \overline{abcde} = 99$

$\overline{abcde} = 99n = 3^2 \times 11 \times n$

$3 \times 11^2 t^3$

$\overline{abcde} = 35937.t^3$



$\therefore \overline{abcde} = 35937$

Luego la cifra de las centenas es 9

$C = 9$ Rpta. C

6. Para pavimentar un patio cuadrado se emplean locetas de 50 x 50cm. Si el patio tuviera un metro mas por cada lado se habrá necesitado 140 locetas más. ¿Cuánto mide cada lado del patio?
- a) 12 b) 12,50
c) 19.50 d) 16 e) 17

Resolución:

Sea "L" la longitud de lado "L"

Locetas Iniciales : $\frac{L^2}{2500 \text{ cm}^2}$

Locetas Finales : $\frac{(L + 100)^2}{2500 \text{ cm}^2}$

Por dato:

$\frac{L^2}{2500 \text{ cm}^2} - \frac{L^2}{2500} = 140$

$\therefore L = 17$ Rpta. E

EJERCICIOS

1. Hallar (a + b) si: $\overline{22ab}$ es un cuadrado perfecto.
a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11
Rpta.
2. Si: $\overline{5ab}$ y $\overline{7ab}$ son cuadrados perfectos. Hallar (a - b)
a) 7 b) -7 c) 6 d) 3 e) 4
Rpta.

3. Si: $\overline{9ab4} = \overline{mn}^2$, hallar (a+b+m+n)
a) 23 b) 24 c) 26 d) 33 e) 30
Rpta.

4. Si: $N^3 = \overline{abcde}$ tal que:
a + c + e = 19
b + d = 8
Hallar a . b
a) 21 b) 18 c) 20 d) 12 e) 15
Rpta.

- Si: $\overline{21ab}$ y $\overline{29ab}$ son cuadrados perfectos. Hallar a.b
a) 6 b) 12 c) 20 d) 36 e) 18
Rpta.

5. Si: \overline{abcd} es un cuadrado perfecto y $\overline{cd} = 8\overline{ab}$, hallar (a+b+c+d)
a) 16 b) 17 c) 18 d) 19 e) 20
Rpta.

RAZONES PROPORCIONES SERIES DE RAZONES GEOMÉTRICAS PROMEDIOS

INTRODUCCIÓN

Es frecuente encontrarnos en nuestra vida cotidiana con situaciones como las siguientes:

- El costo de un artículo hace un mes era de S/. 48 actualmente es de S/.52.
- La temperatura en Lima es de 20°C y en Punto de 8°C
- La altura de dos edificios son de 30 m y 22,5 m
- Un automóvil inicia su desplazamiento con una velocidad de 20 m/s

En los casos anteriores se observa que el costo, temperatura, altura y velocidades son susceptibles de ser medidos de allí que se les define como magnitud matemática, se nota también que toda magnitud matemática viene asociada a una cantidad, lo cual nos permite hacer comparaciones y es precisamente ello lo que vamos a estudiar.

RAZÓN

Es la comparación que se establece entre dos cantidades de una magnitud mediante las operaciones de sustracción o división, lo cual nos induce a señalar que se tiene dos clases de razón.

Razón aritmética

Es la que se obtiene mediante la sustracción y consiste en determinar en cuánto excede una de las cantidades de la otra.

Ejemplo:

Los automóviles A y B se desplazan con velocidades de 24 m/s y 20 m/s

respectivamente, compáremos las velocidades:

$$\underbrace{24\text{m/s}}_{\text{Antecedente}} - \underbrace{20\text{m/s}}_{\text{Consecuente}} = \underbrace{4\text{m/s}}_{\text{Valor de la razón}}$$

Antecedente Consecuente

Interpretación:

La velocidad del automóvil "A" excede en 4 m/s a la velocidad del automóvil "B"

Razón Geométrica

Es la que se obtiene mediante la división y consiste en determinar cuántas veces cada una de las cantidades contienen la unidad de referencia.

Ejemplo:

Los edificios M y N tienen una altura de 48 m y 36 m respectivamente, compáremos sus alturas (en ese orden):

$$\begin{array}{l} \text{Razón Geométrica} \\ \uparrow \\ \text{Antecedente} \rightarrow \boxed{48\text{m}} \quad \boxed{\frac{4}{3}} \\ \text{Consecuente} \rightarrow \boxed{36\text{m}} \quad \boxed{3} \\ \downarrow \\ \text{Valor de la razón} \end{array}$$

Interpretación:

- * Las alturas de los edificios M y N son entre sí como 4 es a 3 porque:

Altura de M: 4(12m) Donde: 12m es la unidad de referencia.

Altura de N: 3(12m)

- * Altura de N: 3(12m)

- * Por cada 4 unidades de 48 m hay 3 unidades de 36 m
- * Las alturas de los edificios M y N están en la relación de 4 a 3

En general

Magnitud Cantidades
x a y b

RAZON	
Aritmética	Geométrica
$a - b = R$	$\frac{a}{b} = K$

Términos

a : antecedente

b : consecuente

R y K: valores de las razones

NOTA

Quando en el texto se mencione solamente razón o relación se debe entender que se hace referencia a la razón

Proporción

Es la igualdad en valor numérico de dos razones de la misma clase.

Proporción aritmética

Es aquel que se forma al igualar los valores numéricos de dos razones aritméticas.

Ejemplo:

Se tiene cuatro artículos cuyos precios son: S/.15, S/.13, S/.9, S/.7. Los cuales se comparan mediante la sustracción del siguiente modo:

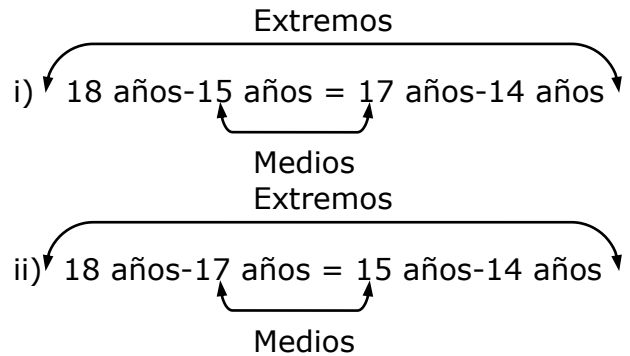
$$\left. \begin{array}{l} S/.15 - S/.13 = S/.2 \\ S/.9 - S/.7 = S/.2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} S/.15 - S/.13 = S/.9 - S/.7 \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{Términos Medios} \end{array}$$

Interpretación:

El precio S/. 15 excede a precio de S/. 13 tanto como el de S/. 9 excede al de S/.7.

Ejemplo:

Forme una proporción aritmética con las edades de 4 alumnos y que son: 15 años, 17 años, 18 años y 14 años.



Llevando los extremos y medios a un solo miembro de la igualdad se obtiene lo siguiente:

Extremos Medios
* 18 años + 14 años = 17 años + 15 años
32 años = 32 años

Extremos Medios
* 18 años + 14 años = 19 años + 17 años
32 años = 32 años

De donde podemos concluir que en toda proporción aritmética:

[Suma de extremos] = [suma de medios]

Dependiendo del valor que asumen los términos medios las proporciones aritméticas presentan dos tipos.

A. Discreta.

Quando los valores de los términos medios son diferentes.

Ejemplo:

Forme una proporción aritmética con las alturas de 4 edificios y que son: 25m; 18m; 42m y 35m.

Ejemplo:

Halle la cuarta diferencial de los precios de tres artículos que son: S/. 50, S/.34 y S/.29

NOTA

Convencionalmente se asumen los términos de la proporción aritmética en el orden como se presenta en el texto

$$\left(\begin{matrix} \text{1er} \\ \text{Término} \end{matrix} \right) - \left(\begin{matrix} \text{2do} \\ \text{Término} \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} \text{3er} \\ \text{Término} \end{matrix} \right) - \left(\begin{matrix} \text{4to} \\ \text{Término} \end{matrix} \right)$$

B. Continua.

Cuando los valores de los términos medio son iguales.

Ejemplo:

Forme una proporción aritmética continua con los volúmenes de 4 recipientes y que son: 19 cm³, 15 cm³ y 11cm³.

Ejercicios:

1. Calcule la media diferencial de las temperaturas 35° y 17°
2. Halle la tercera diferencial de los pesos 41 kg. y 35 kg.

Resumiendo

PROPORCION ARITMÉTICA	
Discreta	Continua
<p>Extremos</p> $a - b = c - d$ <p>Medios</p>	<p>Extremos</p> $a - b = b - c$ <p>Medios</p>
<p>d: Cuarta diferencial de a, b y c</p>	<p>b: media diferencial de a y c</p> <p>c: Tercera diferencial de a y b</p>

PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

Es aquel que se forma al igualar los valores numéricos de dos razones geométricas.

Ejemplo:

Se tiene cuatro recipientes cuyas capacidades son: 21L 7L; 15L y 9L, las

cuales se comparan mediante la división del siguiente modo:

$$\left. \begin{matrix} \frac{21L}{7L} = 3 \\ \frac{15L}{5L} = 3 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 21L = 15L \cdot \frac{21L}{5L} \text{ y } 5L \\ 7L = 15L \cdot \frac{7L}{5L} \end{matrix}$$

Interpretación:

La capacidad de 21L es a la capacidad de 7L como la de 15L es al de 5L.

Ejemplo:

Forme una proporción geométrica con las velocidades de 4 automóviles y que son: 15m/s; 20m/s; 9m/s y 12m/s.

Resolución:

$$a) \frac{15m/s}{20m/s} = \frac{9m/s}{12m/s} = \frac{3}{4}$$

Extremo: 15 m/s y 12 m/s

Medios: 20 m/s y 9m/s

Valor de cada razón geométrica: $\frac{3}{4}$

$$b) \frac{20m/s}{15m/s} = \frac{12m/s}{9m/s} = \frac{4}{3}$$

Extremo: 20 m/s y 9 m/s

Medios: 15 m/s y 12m/s

Valor de cada razón geométrica: $\frac{4}{3}$

* Llevando los términos medios y extremos a un solo miembro de la igualdad se obtiene lo siguiente

$$\begin{matrix} \text{Extremos} & & \text{Medios} \\ (15 \text{ m/s})(12 \text{ m/s}) & = & (9\text{m/s})(20 \text{ m/s}) \\ & & 180 = 180 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{Extremos} & & \text{Medios} \\ (20 \text{ m/s})(9 \text{ m/s}) & = & (12\text{m/s})(15 \text{ m/s}) \\ & & 180 = 180 \end{matrix}$$

De donde podemos concluir que en toda proporción geométrica:

[Producto de Extremos]=[Producto de Medios]

* Dependiendo del valor que asumen los términos medios, las proporciones geométricas presentan dos tipos:

A. Discreta. Cuando los valores de los términos medios son diferentes.

Ejemplo:

Formar una proporción geométrica discreta con las notas de 4 estudiantes y que son: 20; 16; 15 y 12

NOTA

Convencionalmente se asumen los términos de la proporción en el orden como se presentan en el texto.

$$\frac{(1er.Tér\ min\ o)}{(2da.Tér\ min\ o)} = \frac{(3er.Tér\ min\ o)}{(4to.Tér\ min\ o)}$$

Ejercicio:

Calcule la cuarta proporcional de las estaturas de 3 estudiantes y que son: 1,6 m; 1,2m y 1,4m.

B. Continúa. Cuando los valores de los términos medios son iguales

Ejemplo.

Forme una proporción geométrica continua con las medidas de tres ángulos y que son: 12°, 18° y 27.

Ejercicios:

- Halle la media proporcional de las obras realizadas por dos obreros y que fueron: 20m² y 45m².
- Calcule la tercera proporcional de la longitud de dos pizarras y que son: 1,6m y 2,4m.

Resumiendo:

PROPORCION GEOMÉTRICA	
Discreta	Continua
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$
d: Cuarta proporcional de a, b y c	b: Media proporcional de a y c. c: Tercera proporcional de a y b.

Propiedades de la Proporción Geométrica

* Al efectuar las operaciones de adición y/o sustracción con los términos de cada razón en una proporción, estas mismas operaciones se verifican con los términos de la otra razón

Si: $\frac{4}{8} = \frac{6}{12} \rightarrow \frac{4+8}{8} = \frac{6+12}{12}$ $\frac{4+8}{4} = \frac{6+12}{6}$

$\frac{12}{8} = \frac{18}{12}$ ó $\frac{12}{4} = \frac{18}{6}$

144 = 144 72 = 72

$\frac{8-4}{8} = \frac{12-6}{12}$ $\frac{8+4}{8-4} = \frac{12+6}{12-6}$

0 $\frac{4}{8} = \frac{6}{12}$ 0 $\frac{12}{4} = \frac{18}{6}$

48 = 48 72 = 72

APLICACIONES

- Si 5 es la cuarta proporcional de a,6 y b además b es la cuarta proporcional de a,9 y 30, halle a+b.....Rpta 33
- Halle la cuarta proporcional de 56, m y n, sabiendo que m es la media proporcional de 28 y 7 y "n" es la tercera proporcional de 9 y 12.....Rpta 4

3. La suma de todos los términos de una proporción geométrica es 415. Si se sabe que la razón de esta proporción es $\frac{2}{3}$, calcule la suma de los consecuentes
Rpta 249

4. En una proporción geométrica continua se sabe que la suma de los extremos es 60. Determine la diferencia de los consecuentes sabiendo que el valor de la razón es $\frac{1}{2}$ Rpta 24

5. El producto de los antecedentes de una proporción geométrica es 15. Calcule la suma de los consecuentes, si la cuarta proporcional es 10, además se sabe que los términos son números enteros mayores que la unidad.....Rpta 16 ó 150

SERIE DE RAZONES GEOMÉTRICAS EQUIVALENTES

En algunas oportunidades nos encontramos con razones geométricas que tienen el mismo valor numérico, como:

$$\frac{10}{5} = 2; \frac{14}{7} = 2; \frac{6}{3} = 2; \frac{12}{6} = 2$$

Las cuales pueden igualarse del siguiente modo:

$$\frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2, \text{ la cual es llamada}$$

SERIE DE RAZONES GEOMÉTRICAS EQUIVALENTES. (SRGE)

Donde: * 10; 14; 6 y 12 son los antecedentes

* 5; 7; 3; y 6 son los consecuentes

*2 es la constante de proporcionalidad

Realicemos algunas operaciones con los términos:

$$a. \frac{10+14+6}{5+7+3} = \frac{30}{15} = 2 \quad b. \frac{10+12-6}{5+6-3} = \frac{16}{8} = 2$$

En ambos casos se observa que la constante de proporcionalidad no ha variado lo cual nos induce a:

$$\frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{10-6}{5-3} = \frac{10+6-12}{5+3-6} = \frac{10+14-6-12}{5+7-3-6} = 2$$

$$c) \frac{10 \cdot 14 \cdot 6}{5 \cdot 7 \cdot 3} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \quad d) \frac{10 \cdot 14 \cdot 6}{5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 6} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$$

Se puede observar que al multiplicar los antecedentes y consecuentes la constante de proporcionalidad se ve afectada de un exponente que numéricamente es igual a la cantidad de razones consideradas para la multiplicación.

En general para "n" razones de igual valor numérico se tiene:

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} = \dots = \frac{a_n}{c_n} = K$$

Donde: Además
 $a_i =$ antecedente $a_1 = c_1 k$
 $c_i =$ consecuente $a_2 = c_2 k$
 $K =$ constante de proporcionalidad $a_3 = c_3 k$
 $= c_3 k$:
 $a_n = c_n k$

En el cual se cumplen las siguientes propiedades:

$$1. \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} \dots = \frac{a_n}{c_n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n} = K$$

Textualmente:

$$\frac{\text{suma de antecedentes}}{\text{suma de consecuentes}} = K$$

estudiante, esto nos lleva a pensar que debe haber otro procedimiento (y no el de la suma de datos y dividirlo entre el número de datos) que nos permita hallar el valor que sea realmente representativo de los datos.

Ejemplo 3.

Las edades de 7 personas son: 12,19,18,11,15,21,14 y 9. ¿Cuáles de las siguientes alternativas no pueden ser un promedio de las edades.

- a) 13,5 b) 17 c) $9\sqrt{2}$
 d) 23 e) 8,9 f) 16

En general: Para "n" dato

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \dots \leq a_n$ se tiene que:

$$a_1 \leq \text{Promedio} \leq a_n$$

PROMEDIOS IMPORTANTES

Promedio Aritmético o Media Aritmética (\overline{MA})

Ejemplo 1:

Calcule el promedio aritmético de las temperaturas de 5 ciudades y que son: $14^\circ, 13^\circ, 11^\circ, 12^\circ$ y 15°

Resolución

$$\overline{MA} = \frac{14^\circ + 13^\circ + 12^\circ + 11^\circ + 15^\circ}{5} = \frac{65^\circ}{5} = 13^\circ$$

El más sencillo y ya lo habíamos trabajado en ejemplos anteriores en general para "n" datos:

$$\overline{MA} = \frac{\text{suma de datos}}{\text{cantidad de datos}}$$

Ejemplo 2:

4 comerciantes han vendido 13 polos cada uno. Calcule el promedio aritmético de las cantidades de los polos vendidos.

Ejemplo 3:

Cinco vendedores de fruta tienen: 18;30;24;13 y 15 frutas cada uno ¿Qué sucede con el promedio aritmético original?

NOTA

Para determinar la variación que experimenta el promedio aritmético de un conjunto de datos sólo es necesario considerar el incremento o disminución en la suma de los datos.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Variación del} \\ \text{promedio} \end{array} \right] = \frac{\text{incremento ó disminución en la suma de los datos}}{\text{Cantidad de datos}}$$

Ejemplo 4:

El promedio de 20 datos es 70 y de otros 30 datos es 40. Calcule el promedio de los 50 datos.

NOTA

Cuando de un Conjunto de datos se conoce su promedio implícitamente ya se tiene la suma de los datos.

* $\overline{MA} (n \text{ datos}) = k \rightarrow \text{suma} (n \text{ datos}) = n(k)$

Ejemplo 5:

Un auxiliar de educación tiene el siguiente informe sobre las aulas a su cargo.

Aula	Aulas a Cargo			
	A	B	C	D
Nº de estudiantes	45	40	60	55
Promedio notas	16	15	11	12

Halle el promedio de las notas de los 200 estudiantes

Datos: $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \dots a_k$
 $P_1 \quad P_2 \quad P_3 \dots P_k$

$$\text{Promedio Ponderado} = \frac{a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + \dots + a_k P_k}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_k}$$

Ejemplo 6:

Al finaliza el primer ciclo un cachimbo recibe su boleta de notas, que a continuación se detalla:

Curso	Nº de Crédito	Nota
Matemática	4	16
Lenguaje	2	18
Física I	6	14
Química	8	13

Calcule el promedio ponderado

Promedio Geométrico O Media Geométrica (\overline{MG})

Es un promedio que permite promediar índices y tasas de crecimientos y el procedimiento para calcularlo es:

$$\overline{MG} = \frac{\text{Cantidad de datos}}{\sqrt{\text{Producto de los datos}}}$$

Ejemplo 1:

En una comunidad campesina se ha observado el crecimiento poblacional de los 3 últimos años y los datos son:

Año	:	1 998	1999	2000
Crecimiento	:	125	343	512

Ejemplo 2:

El índice de crecimiento de niños vacunado contra la tifoidea en los últimos 5 años ha sido:

Año	1996	1997	1998	1999	2000
Tanto Por Ciento	84%	150%	210%	315%	490%

Promedio Armónico o Media Armónica (\overline{MH})

Es la inversa del promedio aritmético de los recíprocos de los datos.

$$\overline{MH} = \frac{\text{Cantidad de datos}}{\text{suma de las inversas de los datos}}$$

Mediana (Me)

Es un promedio que representa el punto medio de los datos para determinarlo el procedimiento es el siguiente:

Se ordenan los datos en forma creciente o decreciente.

- a. Si el número de datos es impar, la mediana es el dato central.
- b. Si el número de datos es par, la mediana es el promedio aritmético de los datos centrales.

Ejemplo 1:

Halle la mediana de las temperaturas de 5 ciudades y que son 12º, 15º, 13º, 36º y 9º

Ejemplo 2:

Se ha recopilado las notas de 12 estudiantes los cuales son: 13;15;16;18;7;8;15;10;5;20;15;7. Calcule la mediana.

Resolución

Ordenamos en forma decreciente:

18 16 15 15 15 13 10 8 7 7 5
 ↑ ↑
 Datos Centrales

Luego: $Me = \frac{15+13}{2} = 14$

Conclusión: El 50% de los estudiantes tienen 14 como nota máxima.

MODA (Mo)

Es el valor más frecuente o el que más se repite en un conjunto de datos.

Ejemplo 1:

Calcule la moda del coeficiente intelectual de un grupo de estudiantes siendo los coeficientes 100; 90; 100; 120; 100; 95.

Resolución

Se observa que el dato que más se repite es 100.

$$\text{Luego: } Mo = 100$$

Conclusión: La mayoría de los estudiantes tienen un coeficiente intelectual aproximado a 100.

Ejemplo 2:

Halle la moda de los ingresos diarios de un grupo de trabajadores, siendo los ingresos: S/15; S/.8; S/.10; S/.15; S/.10; S/.15; S/.17

NOTA

Cuando el conjunto de datos tiene dos modas se le llama bimodal y si tiene más de dos modas se le conoce con el nombre de multimodal

Ejemplo 3:

Se ha realizado una encuesta sobre las preferencias por un determinado curso y los datos fueron:

Curso	Estudiante
* Aritmética	35
* Álgebra	21
* Geometría	17
* Trigonometría	10
* Física	28
* Química	19

Calcule la moda de los datos.

Propiedades (Para la \overline{MA} , \overline{MG} y \overline{MH})

Ejemplo:

Los precios de tres artículos son: S/. 12; S/.8 y S/.18.

Calcule los promedios de precios.

NOTA

Cuando los datos son iguales se cumple que: $\overline{MH}, \overline{MG} = \overline{MA}$

MAGNITUDES PROPORCIONALES

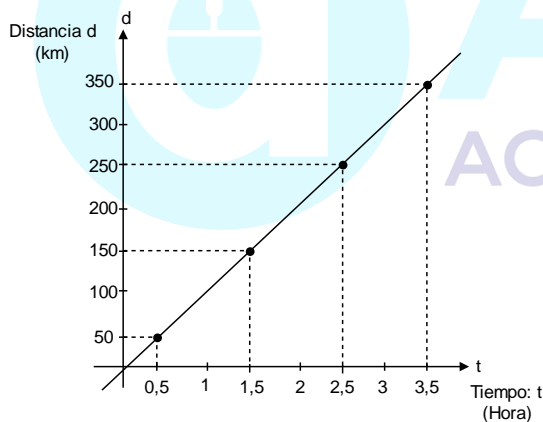
REPARTO

INTRODUCCIÓN

Un grupo de mecánicos deciden realizar el siguiente experimento: Medir las distancias recorridas por un automóvil que tiene una velocidad constante y los lapsos de tiempo correspondiente. Estas mediciones se indican en la tabla siguiente:

Tiempo (horas)	0,5	1,5	2,5	3,5
Distancia (km)	50	150	250	350

Luego gráficamente tendríamos:



La gráfica es una recta, además la razón geométrica de la distancia y el tiempo es constante es decir:

$$\frac{50}{0,5} = \frac{150}{1,5} = \frac{250}{2,5} = \frac{350}{3,5}$$

Esta razón geométrica representa la velocidad constante utilizada por el automóvil. De todo esto concluye que:

$$\frac{\text{Distancia}}{\text{Tiempo}} = \text{Velocidad (constante)}$$

Lo que han realizado los mecánicos es analizar el comportamiento de la distancia respecto al tiempo (denominados magnitudes) y experimentalmente han llegado a la conclusión que a mayor distancia la demanda de tiempo es mayor y matemáticamente se cumple que el cociente de los valores correspondientes es constante.

El proceso realizado por los mecánicos es el mismo que realizan los investigadores científicos, el cual consiste en la búsqueda de la verdad; de una verdad que ya existe, pero que tenemos que descubrir.

Precisamente ello es lo que vamos a estudiar en este capítulo, es decir el comportamiento de magnitudes que en la naturaleza existen.

MAGNITUD

Se entiende como magnitud, para mi estudio, a todo aquello que experimenta cambios, el cual puede ser medido o cuantificado.

CANTIDAD

Es un estado particular de la magnitud en un determinado momento de análisis, el cual resulta de medir (cuantificar) la variación, expresado en ciertas unidades de medida.

RELACIÓN ENTRE DOS MAGNITUDES

Dos magnitudes son proporcionales cuando al variar uno de ellos entonces la otra también varía en la misma proporción. Analicemos los siguientes casos:

Ejemplo 1:

En un determinado momento una persona coloca 5 estacas de diferentes alturas y luego procede a medir la sombra que

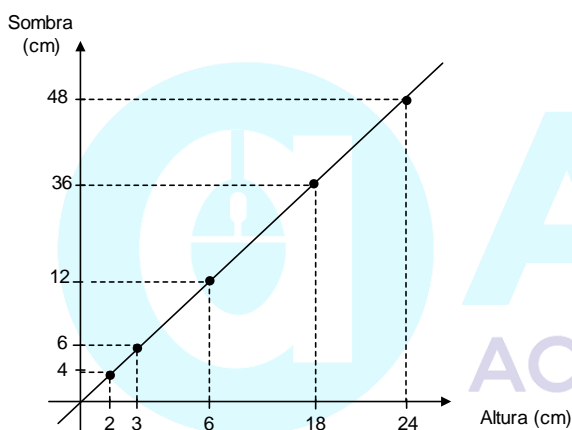
proyecta cada una de ella, todo él lo anota en el siguiente cuadro:

Sombra Proyectada (cm)	4	6	12	36	48
Altura de cada estaca (cm)	2	3	6	18	24

Intuitivamente se puede afirmar que a mayor altura de la estaca, mayor sombra proyectada. Esta afirmación, matemáticamente se puede expresar así:

$$\frac{\text{valor de la sombra}}{\text{valor de la altura}} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{36}{18} = \frac{48}{24} = 2 \text{ (constante)}$$

De la cual surge la gráfica siguiente



Donde los puntos corresponden a una recta que pasa por el origen de coordenadas, la cual presenta una inclinación respecto al eje horizontal (llamada pendiente) que numéricamente es igual a la razón geométrica de los valores correspondientes a las magnitudes.

Podemos observar que las magnitudes sombra proyectada y altura de las estacas cumplen que el cociente de sus valores correspondientes es constante y que su gráfica es una recta. Cuando 2 magnitudes cumplen esta 2 condiciones les llamaremos magnitudes directamente proporcionales. De aquí podemos mencionar que si los valores de las magnitudes aumentan (o

disminuyen) en la misma proporción son directamente proporcionales.

En general para dos magnitudes A y B estas se relacionan en forma directamente proporcional si el cociente de sus valores correspondientes es una constante.

Notación:

A D.P. B →

$$\frac{\text{valor de (A)}}{\text{valor de (B)}} = \text{constante}$$

NOTA

1. La gráfica de dos magnitudes D.P., son puntos que pertenecen a una recta que pasa por el origen de coordenadas.
2. En cualquier punto de la gráfica (excepto el origen de coordenadas) el cociente de cada par de valores resulta una constante.

Observación:

Como el gráfico es una recta la función es lineal y la ecuación es de la forma: $y = mx$ donde m es la pendiente.

También: $f(x) = mx$
 $y =$ valor de la magnitud A
 $x =$ valor de la magnitud B

Ejemplo 2:

Una empresa constructora estudia el tiempo que emplea un grupo de obrero para realizar una obra (todos los obreros rinden igual) y estos son los datos obtenidos.

Número de obreros	10	20	24	30	40	50
Tiempo (días)	60	30	25	20	15	12

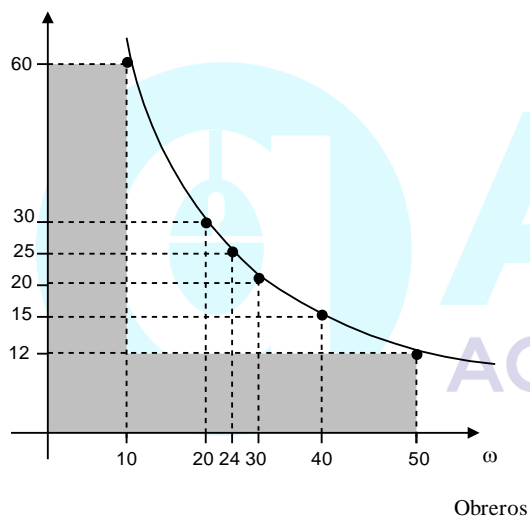
Se observa cuando hay más obreros menos tiempo se emplea. El comportamiento de los valores es inverso, esto lleva a señalar que la magnitud obreros y tiempo son inversamente proporcionales. Además de ello se tiene que:

$$10(60) = 20(30) = 24(25) = 30(20) = 40(15) = 50(12) = 600$$

De donde:

$$\left(\begin{matrix} \text{Valor de} \\ \text{obrerros} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \text{Valor de} \\ \text{tiempo} \end{matrix} \right) = \text{constante (obra a realiza)}$$

Gráficamente:



Cada sector rectangular que se genera con un punto de la gráfica y los ejes tienen la misma superficie y que físicamente corresponde a la obra realizada.

En general, dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales si el producto de sus valores correspondiente es constante.

Notación

$$AIPB = (\text{valor de A})(\text{valor de B}) = \text{constante}$$

NOTA

1. La gráfica de dos magnitudes IP, son puntos que pertenecen a una rama de una hipérbola equilátera.
2. En cualquier punto de la gráfica el producto de cada par de valores correspondientes resulta una constante.

Observación

y = valor de la magnitud A
 x = valor de la magnitud B
 $\therefore yx = k$

k = constante

De donde se obtiene la función:

$$y = \frac{K}{x}$$

Propiedad: Cuando se tienen más de 2 magnitudes como A,B,C y D se analizan dos a dos, tomando a una de ellas como referencia para el análisis y manteniendo a las otras en su valor constante.

- * A DP B (C y D constantes)
- * A IP C (B y D constantes)
- $\Rightarrow \frac{A.C}{B.D} = \text{constante}$
- * A DP D (B y C constantes)

REPARTO PROPORCIONAL

Es un procedimiento que tiene como objetivo dividir una cantidad en partes que sean proporcionales a ciertos valores, llamados índices

Clases:

1. Reparto simple: Se llama así porque intervienen sólo dos magnitudes proporcionales, puede ser.

1.1 Directo(cuando intervienen dos magnitudes D.P.)

Analicemos el siguiente caso: Un padre quiere repartir S/. 2 000 entre sus tres hijos, cuyas edades son 8, 12 y 20 años el padre piensa, con justa razón, que su hijo de 20 años tiene mayores necesidades económicas que su otro hijo de 8 años, entonces decide hacer el reparto D.P. a las edades de sus hijos. Esto implica que aquel hijo que tenga más edad recibirá más dinero, y el que tenga menos edad, recibirá menos dinero. Veamos lo que sucede.

Sean las partes A,B, y C tales que cumplan las siguientes condiciones:

$$A+B+C=S/. 2000 \quad \frac{A}{8} = \frac{B}{12} = \frac{C}{20} = K \quad \begin{matrix} A=8K \\ B=12K \\ C=20K \end{matrix}$$

Entonces: $8K+12K+20K = 2000$
 $40 K = 2000 \rightarrow K = 50$

Luego, a c/u le corresponde

$A = 8.50 \rightarrow A = S/. 400$
 $B = 12.50 \rightarrow B = S/. 600$
 $C = 20.50 \rightarrow C = S/. 1000...Rpta$

Recuerde que, cuando dos magnitudes son D.P. el cociente entre ellas es una constante.

Repartir 39000 IP a 2,3,4

Podemos resolver el problema empleando el método práctico, planteado en el caso anterior.

$$S/. 39000 \left\{ \begin{array}{l} A) \frac{1}{2}.12 \rightarrow 6K \rightarrow S/.18000 \\ B) \frac{1}{3}.12 \rightarrow 4K \rightarrow S/.12000 \\ C) \frac{1}{4}.12 \rightarrow 3K \rightarrow S/.9000 \end{array} \right.$$

$$K = \frac{39000}{6+4+3} = 3000$$

Obsérvese que los números que representan las faltas de estos 3 empleados se colocan invertidos (recuerdo que el reparto es I.P.), luego si a c/u de estos se les multiplicara por 12, la relación de proporcionalidad no se altera. Lo que se realiza a continuación es lo mismo que se ha descrito en el caso anterior (reparto directo).

2. Reparto Compuesto

Se llama así porque intervienen más de dos magnitudes proporcionales.

Ejemplo:

Un gerente desea repartir una gratificación de S/. 42000 entre sus tres empleados; en partes D.P. a sus sueldos (S/. 3200 S/.4200 y S/. 5400) el I.P. a sus faltas (4,6 y 9 días respectivamente) ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

Resolución

Resolvemos el problema utilizando el método práctico

$$S/. 42000 \left\{ \begin{array}{l} \text{A) } 3200 \cdot \frac{1}{4} \rightarrow 8K \rightarrow S/.16000 \\ \text{B) } 4200 \cdot \frac{1}{6} \rightarrow 7K \rightarrow S/.14000 \\ \text{C) } 5400 \cdot \frac{1}{9} \rightarrow 6K \rightarrow S/.12000 \end{array} \right.$$

$$K = \frac{42000}{8+7+6} = 2000$$

Observe a pesar que el tener empleado gana más (S/. 5400) no es él quien recibe más gratificación. Esto se debe a que sus faltas (9 días) son muchas, causando una disminución en la gratificación que recibió.

AUGE
ACADEMIA ONLINE

REGLA DE TRES, PORCENTAJE ASUNTOS COMERCIALES

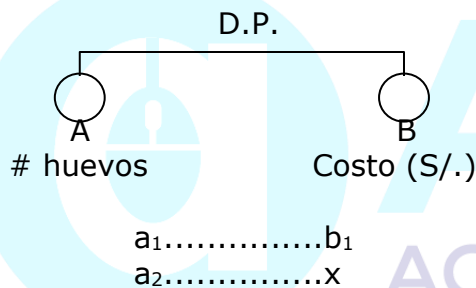
1. REGLA DE TRES SIMPLE

Es un método en el cual intervienen dos magnitudes proporcionales, que tiene como objetivo hallar un cuarto valor, dado tres valores correspondientes a estas dos magnitudes.

Clases:

1.1 Directa: (Cuando intervienen dos magnitudes directamente proporcionales)

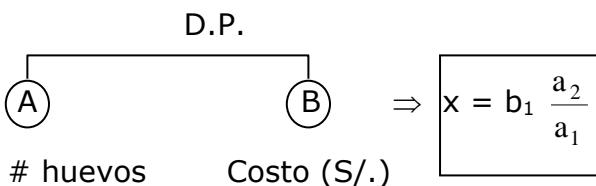
Esquema:



Por teoría de magnitudes proporcionales, se cumple que:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{x} \quad x = b_1 \frac{a_2}{a_1}$$

Una forma práctica para hallar la incógnita "x" es usando el método de las "fracciones". El valor de "x" se obtiene multiplicando el valor que se encuentra sobre él con la fracción obtenida de los otros valores. Veamos como se procede.



$$\downarrow \frac{a_1}{a_2} \quad b_1 \quad x$$

La fracción $\frac{a_1}{a_2}$ queda invertido debido a que se relaciona dos magnitudes D.P.

Ejemplo: Cien obreros emplean 45 días para hacer una obra. ¿Cuántos días emplearán 225 obreros para hacer la misma obra?

IP

Obreros # días

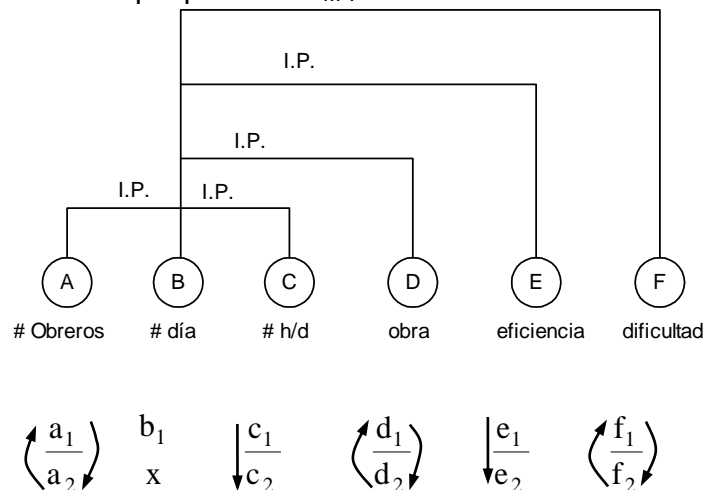
$$\frac{100 \dots\dots 45}{225 \dots\dots x} \Rightarrow x = 45 \cdot \frac{100}{225}$$

∴ x = 20 días.....Rpta.

a₁, b₁ y a₂ son datos, mientras que x es la incógnita

2. REGLA DE TRES COMPUESTA

Se llama así cuando intervienen más de dos magnitudes proporcionales.



Usando el método de las fracciones, hallaremos el valor de "x". Previo ni cálculo. Se debe establecer la relación de proporcionalidad entre la incógnita "x" (# días) y las demás magnitudes. Por ejemplo las magnitudes "A" (# obreros) y la magnitud "B" (# días) son I.P. ya que a MAS obreros trabajando se emplearán MENOS días; de igual modo se hará con las magnitudes restantes. Entonces.

Recuerde que:

D.P.: Diferente escritura
ya que se invierte la fracción

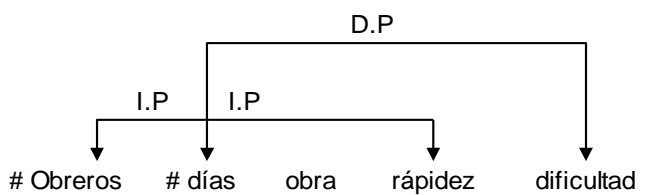
I.P.: Igual escritura

$$x = b_1 \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{e_1}{e_2} \cdot \frac{f_2}{f_1}$$

Ejemplo: Con 18 obreros se puede hacer una obra en 42 días. ¿En cuántos días 15 obreros 6 veces más rápidos que los anteriores, harán una obra cuya dificultad es el quintuple del anterior?

Solución

Colocaremos en dos filas los datos correspondientes a cada una de estas magnitudes, es decir:



$$\downarrow \frac{18}{15} \quad 42 \quad \downarrow \frac{1}{6} \quad \frac{r}{7r} \quad \left(\frac{d}{5d} \right)$$

$$x = 42 \cdot \frac{18}{15} \cdot \frac{r}{7r} \cdot \frac{5d}{d}$$

∴ x = 36 díasRpta

Observación:

Si la rapidez de los otros obreros es "6 veces más" entonces es:

$$r + 6r = 7r$$

PROBLEMAS PARA RESOLVER EN CLASE

1. Si H hombres realizan un trabajo en n días cuantos demoraría en realizado un solo hombre.

- a) nH
- b) H/n
- c) n/H
- d) Es imposible calcular
- e) Faltan datos

2. Si "h" hombres hacen un trabajo en "d" días h + r lo harán en(días).

- a) $\frac{h \cdot d}{h + r}$
- b) $\frac{hd}{h - r}$
- c) d + r
- d) d - r
- e) $\frac{h - r}{h}$

3. 15 obrero han hecho la mitad de un trabajo en 20 días en ese momento abandonaron el trabajo 5 obreros. Cuántos días tardaron en terminar los obreros que quedan.

- a) 24 días
- b) 30 días
- c) 36 días
- d) 32 días
- e) 28 días

4. Alexander de cada 5 tiros al blanco acierta 1, si no acertó 96 tiros ¿Cuántos acertó?

- a) 21
- b) 22
- c) 23
- d) 24
- e) 25

5. Un reloj tiene 3 minutos de retraso y sigue retrasándose a razón de 3 segundos por minuto de ¿Cuántos minutos debes transcurrir para que el reloj marque una hora de retrazo?

- a) 1 140' b) 120' c) 1300'
d) 180' e) 1200'

6. 4 huevos de gallinas cuestan 9 soles y 5 huevos de pata cuestan 11 soles. Encontrar la razón entre el precio de un huevo de gallina y un huevo de pata.

- a) 1: 1,5 b) 45.44 c) 1:4
d) 44:45 e) 1,5:1

7. Un caballo atado a una cuerda de 2m de longitud puede comer todo el pasto que esta a su alrededor en 5hr. En cuantas horas comerá el pasto que esta a su alcance si la longitud de la cuerda fuera 3 veces mayor.

- a) 75 h b) 80 h c) 85 h.
d) 90h e) 95 h

8. 20 operarios pueden producir 240 zapatos en 18 días. Cuantos operarios pueden producir 80 pares de zapatos en 24 días.

- a) 7 b) 8 c) 9
d) 10 e) 11

9. Un Albañil ha construido un muro en 16 días. Si hubiera trabajado 4 horas menos habría empleado 8 días más para hacer el muro ¿Cuántas horas hubiera trabajado por día?

- a) 6h b) 12h c) 10h
d) 8h e) 16h

10. Si 4 hombres y 5 mujeres hacen un trabajo en 54 días ¿En cuantos días realizaran el mismo trabajo 5 hombres y 6 mujeres. Sabiendo que el trabajo de una mujer son los $\frac{2}{3}$ del trabajo de un hombre?

- a) 66 b) 67 c) 48
d) 44 e) 49

11. Una fuente que da 120 lt. Cada 6 minutos llena 1 tanque de agua en 4h 30' ¿Qué tiempo tardará en llenar el tanque conjuntamente con otra fuente que da 20 litros cada 75 segundos?

- a) 3h b) 2.5h c) 3.5h
d) 2h e) 4h

12. Si 36 obreros cavan 120m de 1 zanja diaria. ¿Cuál será el avance diario cuando se ausenten 9 obreros?

- a) 70m b) 60m c) 80m
d) 90m e) 100m

13. Si 60 obreros trabajando 8h/d construyen 320 m de 1 obra en 20 días. En cuantos días 50 obreros trabajando 6 horas diarias harán 300m de la misma obra.

- a) 40 días b) 30 días c) 35 días
d) 28 días e) 36 días

14. Se ha calculado que 750m de una zanja pueden ser excavados en 10 días. Si 7 obreros hicieron 350m y posteriormente con 5 ayudantes concluyen la obra en el plazo fijado los días trabajados por los ayudantes son:

- a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

15. Una cuadrilla de 12 obreros pueden cavar un techo en 8 horas. ¿Qué tiempo tardarían 15 obreros en elevar el mismo techo?

- a) 6,5 hr b) 6,3 hr c) 6,9 hr
d) 6,4 hr e) 6,2 hr

16. Un ingeniero puede construir 600m de carretera con 40 hombres en 50 días trabajado 8h/d. ¿Cuántos días tardaría este ingeniero den construir 800m, de carretera con 50 obreros doblemente eficiente que los anteriores en un terreno de triple dificultad trabajando 2hr más por día?

- a) 80 días b) 65 días c) 74 días
d) 64 días e) 22 días

17. Se ha estimado que 45 obreros pueden construir una obra en 36 días. Pasado 12 días, se accidentaron 6 de ellos y no pudieron continuar laborando 8 días más tarde se tuvo que contratar otros obreros y si entregan la obra en la fecha establecida. ¿Cuántos obreros se contrataran sabiendo que son de la misma eficiencia que los accidentados?

- a) 6 b) 7 c) 9 d) 8 e) 10

18. Una cuadrilla de obreros puede hacer una obra en 18 días. En los primeros 10 días trabajo solamente la mitad de la cuadrilla para terminar la obra trabajan 13 obreros durante 24 días ¿Cuántos obreros construyen la cuadrilla?

- a) 18 b) 20 c) 24
d) 25 e) 21

19. Una bomba puede llenar un tanque en 10h 25' cuando se ha llenado la quinta parte del tanque se malogra la bomba y reduce su rendimiento en 1/3 de su valor. ¿En que tiempo total se llenó el tanque?

- a) 12 h 30min b) 12h 05 min
c) 11h 45min d) 11H 30 min
e) 14 h 35 min

20. Un grupo de obreros en número de 30 se comprometió hacer una obra en 40 días trabajando 8h/d. Después de hacer $\frac{1}{4}$ de la obra se acordó que la obra quedará terminada 10 días antes del plazo estipulado y así se hizo. Con cuántos obreros deberán reforzarse si ahora todos trabajada 10h/d.

- a) 36 b) 14 c) 18
d) 6 e) 10

21. La hierba crece en todo el prado con igual rapidez y espesura. Se sabe que 70 vacas se la comieran en 24 días, 30 vacas en 60 días ¿Cuántas vacas se comieron toda la hierba en 96 días?

- a) 24 b) 20 c) 25
d) 28 e) 32

REGLA DE TANTO POR CIENTO

Definición

Se llama porcentaje o tanto por ciento a una determinada cantidad con relación a 100 unidad.

La regla del tanto por ciento es una aplicación de la regla de 3 simple directa.

NOTACIÓN

Representar "a por ciento N"

a por ciento de N \Leftrightarrow a % de N

a por ciento de N \Leftrightarrow a $\frac{1}{100}$ de N

"a por ciento de N" $\frac{a}{100} \cdot N$

Obs: Nótese que para efecto de solución el % es un operador matemático que significa "POR 1/100%".

$$\% = \frac{1}{100}$$

Ejm: Hallar el 20% de 450

$$20\% \text{ de } 450 = \frac{20}{100} \cdot 450 = 90$$

REPRESENTACIÓN GENERAL DE UNA OPERACIÓN DE TANTO POR CIENTO

Si: "P es el a por ciento N"

Representación: $P = a\% \text{ N}$
 (Parte o porcentaje) Tanto por ciento Total

CONSIDERACIONES

- a) 8% significan que de cada 100 unidades se consideran 8.
- b) Una cantidad total representa el 100%

$$N = 100\% N$$

EJEMPLO PRACTICO:

1. Cual es el 5% de 700
 $P = 5\% \cdot 700 = \frac{5}{100} \cdot 700 \rightarrow P = 25$
2. Hallar el 125% de 80
 $P = 125\% \cdot 80 = \frac{125}{100} \cdot 80 \rightarrow P = 100$
3. Que tanto por ciento de 3000 representan 45.
 $45 = \frac{a}{100} \cdot 3000 \rightarrow a = 1,5$

4. 920 es el 20% de que cantidad

$$920 = \frac{20}{100} \cdot N \rightarrow N = 4600$$

PORCENTAJE A LO MAS Y A LO MENOS

30% más del 205 menos de 1 cierto número.

30% más → 130%
 20% menos → 80%

APLICACIONES COMERCIALES

Pv: Precio de Venta

PL: Precio Marcado o de lista

Pc: Precio de Costo

G: Gasto

P : Perdida

GB: Ganancia Bruta

GN: Ganancia Neta

- 1) $Pv = Pc + G$ 3) $Pv = Pc + Gasto + G$
- 2) $Pv = Pc - P$ 4) $P_{fijado} - D = P.V.$
- 5) $G_N = G_B - G$

TANTO POR CIENTO

En la regla de porcentaje consideramos respeto a 100 pero si refiere a otro número cualquiera se tiene la regla del tanto por ciento.

Hallar el 3 por 4 de 200

Resolución: $\frac{3}{4} \times 200 = 150$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular EL 30% de 8000
 a) 3600 b) 4800 c) 2400
 d) 1200 e) 2600
2. Hallar el 10% de 90% del 50% de 200.
 a) 3 b) 6 c) 12 d) 9 e) 10

3. El 60% de que número es 42
a) 50 b) 60 c) 40 d) 30 e) 70
4. Que porcentaje de 400 es 320
a) 60% b) 80% c) 105%
d) 50% e) 90%
5. El área de un rectángulo se disminuye un 30% y resulta 350 cm² ¿Cuál era el área original?
a) 250 cm² b) 420 cm²
c) 500 cm² d) 699 cm²
e) 700 cm²
6. Actualmente Carlos tienen x años, dentro de 5 años su edad habrá aumentado en 20% ¿Cuál es su edad actual?
a) 10 años b) 15 años
c) 20 años d) 25 años
e) 30 años
7. Hace 1 mes el kg. de azúcar costaba S/5; actualmente cuesta S/. 7 ¿En qué porcentaje ha aumentado el precio del azúcar?
a) 4% b) 20% c) 30%
d) 40% e) 50%
8. En una reunión se encuentran 20 hombre adultos, 30 mujeres adultas y 75 años niños ¿Qué porcentaje de los reunidos no son niños?
a) 40% b) 50% c) 10%
d) 20% e) 30%
9. Un balde lleno de agua pesa 5kg. Cuando se extrae la mitad del agua, el peso inicial queda reducido en un 40% ¿Cuál es la capacidad del balde?
a) 2 lt b) 4 lt c) 3lt
d) 1 lt e) 5lt
10. Un automóvil demora normalmente un cierto tiempo para llegar de A a B pero llegarían en 2 horas menos si variase su velocidad en un 40% ¿Cuánto tarda ese automóvil en llegar normalmente de A a B?
a) 4hr b) 5hr c) 6hr
d) 7 hr e) 8hr
11. Un empleado gana 30% más de lo que gana su ayudante. El sueldo del empleado aumenta en 40% y el de su ayudante en 20% Luego de estos aumentos el sueldo de ambos suman S/ 9060 ¿Cuál era el sueldo del ayudante antes del aumento?
a) S/ 200 b) S/ 2000
c) S/ 3000 d) S/ 2300
e) S/ 3200
12. Gaste el 60% de lo que no gaste ¿Cuanto tenía sabiendo que no gaste S/ 120 más de lo que gaste?
a) 180 b) 240
c) 360
d) 480 e) 560

13. En una reunión de 150 personas, las mujeres constituyen el 60% de los presentes ¿Cuántas parejas deben llegar esta reunión, para que el número de hombre constituyen el 45% de todos los asistentes?
- a) 50 b) 65 c)70 d)75 e)80
14. Después de una de sus batallas Atilo observo que el 5% de sus soldados había muerto y el 20% de los que quedaron vivos estaban heridos, además había 608 sanos. ¿Cuántos soldados habían muerto?
- a) 10 b)20 c)30 d)40 e)50
15. José y Rubén le invitaron el almuerzo a Cristina en su cumpleaños, cubrían José al 40% de los gastos y Rubén el resto, en dicho almuerzo estuvieron solo presentes los 3. Otro día en agradecimiento y el recompensa Cristina le regala un reloj valorizado en S/.300. Si José quiere quedarse con el reloj. ¿Cuánto dinero tiene que darle por parte Rubén?
- a) S/120 b)S/180 c)S/150
d) S/240 e)S/ 60
16. De los estudiantes de 1 salón de clases, el número de varones es el 80% del de las mujeres. Si el 75% de los varones de este salón, se van de paseo con el 40% de las mujeres ¿Qué porcentaje de los hombres que se quedaron constituyen el 10% de las mujeres que no fueron de paseo?
- a) 30% b) 60% c) 50%
d) 40% e) 80%

INTERÉS SIMPLE DESCUENTO

DEFINICIÓN

Se llama interés ó rédito, a la suma o ganancia que produce un capital prestado, durante tiempo y según una tasa fijada (en porcentaje).

CLASES:

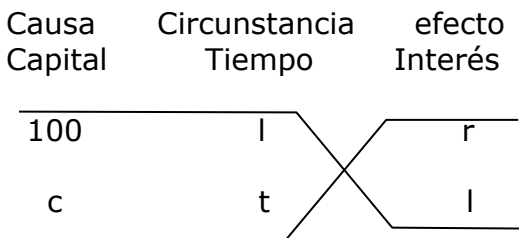
El interés puede ser simple o compuesto se llama simple cuando los intereses se retiran permaneciendo el capital constante durante todo el tiempo del préstamo. El interés se llama compuesto, cuando los intereses no se retiran; sino se van acumulando al capital primitivo formando nuevos capitales, se dice entonces, que los intereses se capitalizan.

TASA: (Expresada en %)

El interés (ganancia) que se obtiene por cada 100 unidades de capital.

FORMULA PARA CALCULAR EL INTERES SIMPLE

Sabiendo que un capital de S/.100 prestado durante 1 año produce un capital C al cabo de t años.



100.I.t = C. t.r.

$$I = \frac{C.t.r}{100}$$

Notación:

I : Interés

t: tiempo

C: Capital

r: Tasa %

Observaciones:

1. La formula para calcular el interés no es estática, el denominador varía de acuerdo a como esta expresado el tiempo. Si el préstamo es en:

		Denominador
Años	→	100
Meses	→	1200
Días	→	36000

- * En el comercio se considera que el año contiene 12 meses de 30 días cada uno.

1 mes = 30 días

1 año = 360 días

2. La tasa (r) porcentual que intervienen en la formula debe ser anual. Si estuviese en otro período de tiempo se debe considera una tasa anual equivalente.

% Semestral x 2 = r Anual

% Trimestral x 4 = r Anual

% Bimestral x 6 = r Anual

% Semanal x 52 = r Anual

3. El monto representa la suma del capital más el interés.

$$M = C + I$$

$$M = C + \frac{C.r.t}{100}$$

$$M = C \left(1 + \frac{r.t}{100} \right)$$

CALCULO DEL INTERES EN FUNCION DEL MONTO

Si $M = C + I$

Como $I = \frac{C.t.r}{100} \rightarrow C = \frac{100I}{t.r.}$

$M = C + I = I + \frac{100I}{t.r.}$

Despejando:

$I = \frac{M.t.r.}{100 + t.r.}$

DESCUENTO

Existen dos tipos de descuento:

- a. Descuento Comercial ó Bancario (D_C)
- b. Descuento Racional ó Matemático (D_R)

Términos utilizados

Valor Nominal.

Es el valor impreso en el (V_n) documento (Letra, cheque, pagaré)

Valor Actual.

Es el valor tasado en el momento (V_A) de realizar la transacción comercial.

RELACIONES BÁSICA

$V_A = V_n - D_C$	$D_C = \frac{V_n.t.r.}{100}$
$D_R = \frac{V_n.r.t}{100 + r.t}$	$V_n = \frac{D_C.D_R}{D_C - D_r}$

PROBLEMAS

1. Calcular el interés producido por S/. 2000 impuesto al 20% durante 5 años.
 - a) 500
 - b) 1000
 - c) 2000
 - d) 1500
 - e) 2500

2. Determinar el interés generado al depositar S/. 1200 al 10% trimestral durante 6 meses.
 - a) S/.120
 - b) S/.150
 - c) S/. 180
 - d) S/. 210
 - e) S/. 240

3. Cuál es el capital que se coloca al 30% durante 2 años para obtener un interés de S/. 120
 - a) S/.180
 - b) S/.200
 - c) S/. 210
 - d) S/.250
 - e) S/.400

4. A que tasa de interés la suma de S/. 20000 llegaría a un monto de 21200 colocada a interés simple en 9 meses?
 - a) 5%
 - b) 6%
 - c) 7%
 - d) 8%
 - e) 9%

5. Un capital estuvo impuesto al 9% de interés anual y después de 4 años se obtuvo un monto de S/. 10200. ¿Cuál es el valor del capital?
 - a) S/. 6528
 - b) S/. 12000
 - c) S/. 13872
 - d) S/. 9260
 - e) S/. 7500

6. ¿Cuál es la suma que al 5% de interés simple anual se convierte en 3 años en S/. 31747?
- a) S/.2760 b) S/.2116
c) S/.1055 d) S/.1380
e) S/.2670
7. Si 10000 soles se dividen en 2 partes, de tal modo que al ser impuestos una de las partes al 42% y la otra al 54% anual producen igual interés. Hallar la parte impuesta al 42%.
- a) S/. 6250 b) S/.5000
c) S/.4375 d)S/.3475
e) S/.5625
8. Los $\frac{2}{5}$ de un capital han sido impuesto al 30%, $\frac{1}{3}$ al 35% y el resto al 40%. El interés total es de 41200 soles anuales. Calcular el capital.
- a) S/. 75000 b) S/. 90000
c) S/. 62000 d) S/.120000
e) S/. 15000
9. Calcular el interés producido por un capital de s/. 40000 durante 4 años al 60% anual.
- a) 98000 b) 96000
c) 48000 d) 72000
e) 54000
10. Calcular el interés producido por un capital de S/. 60000 impuesto durante 30 meses al 40% anual.
- a) 40000 b) 60000
c) 50000 d) 70000
e) 30000
11. Calcular el interés que produce un capital de S/. 3000 impuesto al 1,5 mensual durante 1 año 3 meses.
- a) 765 b) 635 c) 965
d) 975 e) 875
12. Un capital de 2100 soles impuesto al 6% anual ha dado un monto de S/. 2400. Calcular el tiempo.
- a) 2 años 5 meses 15 días, 2 hr
b) 2 años 4 meses 17 días $3\frac{3}{7}$ hr
c) 3 años 2 meses 17 días $2\frac{1}{2}$ hr
d) 2 años 4 meses 27 días $2\frac{1}{7}$ hr
e) 2 años 4 meses 19 días 3 hr
13. Se han colocado las $\frac{2}{7}$ partes de un capital al 6% y las $\frac{3}{5}$ al 10% y el resto al 9%. Si se obtiene una renta de S. 12000 ¿Calcular el capital?
- a) 137 254.90 b) 137854.90
c) 147 254.80 d) 133250.70
e) 137454.60
14. Se han colocado a interés simple $\frac{2}{3}$ de un capital al 5% y del otro tercio al 4.5%, se han retirado al cabo de un año S/. 15725 entre capital e interés. Hallar el capital.
- a) 13000 b) 14000
c) 15000 d) 17000 e) 19000

15. Un capital colocado durante 2 años y medio entre capital e interés es de 2728 nuevos soles, el interés ha sido $\frac{1}{10}$ del capital. Calcular la tasa.
- a) 3% b) 4% c) 5%
d) 3.5% e) 6%
16. Se deposita un capital al 8% mensual de interés. Al cabo de que tiempo se debe retirar el capital más el interés para que la suma depositada represente el 75% de lo que se retira.
- a) 110 b) 125
c) 130 d) 140
e) 150
17. Una persona presta dinero cobrando un interés diario D.P. al número de días transcurrido, al cabo de 14 días se le paga entre lo prestado e interés 4 veces la suma prestada ¿Cuánto tiempo desde el primer día debe transcurrir para que el interés de un solo día sea igual al dinero prestado?
- a) 21 b) 24 c) 28 d) 32 e) 5
18. Hallar el monto que produce un capital de 10800 soles al ser colocado al 5% durante 2 años, 3 meses, 20 días.
- a) 11220 b) 12045 c) 1245
d) 11145 e) 13045
19. Durante cuanto tiempo estuvo depositada un capital al 12% anual si el interés producido alcanza el 60% del capital.
- a) 2 años b) 4 años
c) 3 años d) 5 años e) 6 años
20. Un capital aumenta la mitad de su valor al cabo de cierto tiempo. Cual es este, sabiendo que expresado en años es igual a la mitad del tanto por ciento al cual se impuso el capital.
- a) 4 años b) 5 años c) 3 años
d) 1 año e) 6 años